

# $H$ -ÄQUIVARIANTE MORITA-ÄQUIVALENZ UND DEFORMATIONSQUANTISIERUNG

INAUGURAL-DISSERTATION  
ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES

VORGELEGT VON

STEFAN JANSEN

AUS AACHEN



ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG  
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK  
PHYSIKALISCHES INSTITUT  
NOVEMBER 2006

Dekan:	Prof. Dr. JÖRG FLUM
Referent:	Prof. Dr. HARTMANN RÖMER
Korreferent:	Prof. Dr. WOLFGANG SOERGEL
Tag der mündlichen Prüfung:	18.12.2006

# Inhaltsverzeichnis

Danksagung	iii
Einleitung	vii
<b>1 MORITA-Äquivalenz</b>	<b>1</b>
1.1 Grundlagen zur MORITA-Theorie . . . . .	1
1.1.1 Prä-HILBERT-Räume, $*$ -Algebren und Positivität . . . . .	1
1.1.2 Prä-HILBERT-Moduln und Darstellungen . . . . .	6
1.1.3 Moduln und Bimoduln . . . . .	9
1.1.4 Tensorprodukte und RIEFFEL-Induktion von $*$ -Darstellungen . . . . .	11
1.2 MORITA-Äquivalenz . . . . .	14
1.2.1 Ringtheoretische MORITA-Äquivalenz . . . . .	14
1.2.2 MORITA-Äquivalenz und RIEFFEL-Induktion . . . . .	16
1.2.3 $*$ - und starke MORITA-Äquivalenz . . . . .	18
1.3 Die $H$ -äquivariante MORITA-Theorie . . . . .	21
1.3.1 $H$ -äquivariante Bimoduln und Darstellungstheorie . . . . .	21
1.3.2 $H$ -äquivariante MORITA-Äquivalenzbimoduln . . . . .	24
<b>2 MORITA-Äquivalenz von Cross-Produktalgebren</b>	<b>29</b>
2.1 Cross-Produktalgebren von $*$ -Darstellungen . . . . .	29
2.2 Das PICARD-Gruppoid von Cross-Produktalgebren . . . . .	35
2.3 Das Beispiel $\text{Pic}_H^{\text{str}}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Pic}^{\text{str}}(H)$ . . . . .	37
<b>3 Sternprodukte</b>	<b>41</b>
3.1 Das Quantisierungsproblem . . . . .	41
3.2 Kanonische Quantisierung (auf dem $\mathbb{R}^{2n}$ ) . . . . .	42
3.2.1 Axiomatische Betrachtung einer Quantenmechanik . . . . .	42
3.2.2 Umsetzung der kanonischen Quantisierung im flachen Phasenraum . . . . .	43
3.3 Sternprodukte für $\mathbb{R}^{2n}$ und $\mathbb{C}^n$ . . . . .	48
3.3.1 Standardprodukt, WEYL-Produkt und $\kappa$ -geordnete Produkte . . . . .	48
3.3.2 WICK-Produkt und $\tilde{\kappa}$ -geordnete Produkte . . . . .	50
3.4 Formale Deformationstheorie . . . . .	52
3.4.1 Deformationen von Algebren . . . . .	52
3.4.2 Formale Sternprodukte . . . . .	54

3.5	Äquivalenz und Klassifikation von Sternprodukten . . . . .	57
3.6	Konstruktion von Sternprodukten: FEDOSOV-Konstruktion . . . . .	59
3.6.1	Die FEDOSOV-Konstruktion . . . . .	59
3.6.2	Die FEDOSOV-Konstruktion auf Vektorbündeln . . . . .	67
3.6.3	$G$ -Invariante FEDOSOV-Konstruktion . . . . .	71
<b>4</b>	<b><math>H</math>-Äquivarianz und MORITA-Äquivalenz deformierter Algebren</b>	<b>77</b>
4.1	Invariante und $H$ -äquivariante Sternprodukte . . . . .	77
4.1.1	Motivation und erste Beispiele . . . . .	77
4.1.2	Formulierung mittels HOPF-Algebra Techniken . . . . .	79
4.1.3	Erste Definitionen und Beispiele . . . . .	79
4.2	Deformation von projektiven Moduln . . . . .	83
4.3	Die PICARD-Gruppe von Sternprodukten . . . . .	87
	<b>Ausblick</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Algebraische Grundlagen</b>	<b>91</b>
A.1	Geordnete Ringe und formale Potenzreihen . . . . .	91
A.1.1	Ringe und geordnete Ringe . . . . .	91
A.1.2	Formale Potenzreihen . . . . .	93
A.2	HOPF-* $\text{-Algebren}$ . . . . .	96
A.2.1	Algebren, Koalgebren und Bialgebren . . . . .	96
A.2.2	HOPF-* $\text{-Algebren}$ . . . . .	99
A.2.3	Wirkungen von HOPF-Algebren auf Algebren . . . . .	102
A.2.4	Die Gruppen $\text{GL}(H, \mathcal{A})$ , $\text{GL}_0(H, \mathcal{A})$ , $\text{U}(H, \mathcal{A})$ und $\text{U}_0(H, \mathcal{A})$ . . . . .	105
A.3	Cross-Produktalgebren . . . . .	108
A.4	Verbände . . . . .	111
A.5	Projektive Moduln . . . . .	113
A.6	Faserbündel . . . . .	116
A.6.1	Grundlagen . . . . .	116
A.6.2	Zusammenhang und Krümmung . . . . .	117
A.7	Symplektische Geometrie . . . . .	118
A.7.1	Allgemeine Definitionen . . . . .	118
A.7.2	Symplektische Zusammenhänge . . . . .	119
A.8	Symmetrien – $G$ - und $\mathfrak{g}$ -Invarianz . . . . .	121
A.9	POISSON-Geometrie . . . . .	125
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>127</b>
	<b>Personenindex</b>	<b>137</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>144</b>
	<b>Index</b>	<b>152</b>

# Danksagung

Das Verfassen dieser Arbeit wäre ohne die Unterstützung vieler Menschen nicht möglich gewesen. Ich möchte an dieser Stelle all denjenigen meinen Dank aussprechen, die mich in den letzten viereinhalb Jahren auf ihre Art weitergebracht, unterstützt und ertragen haben. Besonders die folgenden Personen haben unmittelbar Einfluß auf das Gelingen der Arbeit genommen.

An erster Stelle sei Professor HARTMANN RÖMER genannt, der mich herzlich in seine Arbeitsgruppe aufgenommen hat und stets hilfsbereit war, wenn es irgendwelche Probleme zu bewältigen galt.

Ein besonderer Dank gilt STEFAN WALDMANN, der extrem viel Geduld mit mir aufgebracht hat, immer ein offenes Ohr für meine Probleme hatte und mir quasi immer den richtigen Tip geben konnte, wenn es mal nicht so weiterging, wie ich mir das vorgestellt habe. Gerne denke ich an die lustigen und schönen Zwiebelkuchen- und Neuer Süßer-Abende im Hause WALDMANN. Ohne die wissenschaftliche Betreuung durch STEFAN wäre diese Arbeit in dieser Form sicherlich nicht denkbar gewesen wäre.

In gleichem Maße gebührt NIKOLAI NEUMAIER Dank. Auch er war stets bereit seine Zeit für Diskussionen zu opfern, was immer eine wissenschaftliche und menschliche Bereicherung für mich war. Wie bei der Gestaltung von Übungszetteln setzt NIKOLAI auch bei seinen Kuchenkreationen Maßstäbe für die kommenden Generationen.

Ich danke den Doktoranden des achten Stocks, die alle mehr als nur Kollegen geworden sind: SVEA BEISER danke ich für die schöne Zeit, die wir gemeinsam in einem Büro verbracht haben, für das Korrekturlesen, für die Versorgung mit Keksen und Schokolade, für die MONK-DVDs und natürlich die Einladung zur Hochzeitsfeier...

Obwohl MATTEO CARRERA keinen fachlichen Beitrag zu der vorliegenden Arbeit geleistet hat, danke ich ihm für die viereinhalb Jahre, die wir nun zusammen in der „Abteilung RÖMER“ verbracht haben. Ohne ihn wäre die Zeit hier deutlich weniger lustig ausgefallen.

Letzteres gilt auch für MICHAEL CARL, dem ich außerdem für die inspirativen Diskussionen danken möchte.

FLORIAN BECHER sei Dank für das penible Korrekturlesen, die täglichen Cartoons sowie den zahllosen Versuche mich mit Automatenkaffee zu versorgen – auch wenn ich seine Angebote nicht einmal in Anspruch genommen habe...

Allen Mitarbeitern, Doktoranden und Diplomanden, die an dieser Stelle nicht genannt wurden, danke ich für die angenehme Zeit, die wir gemeinsam im Physikhochhaus verbracht haben.

Für die Hilfe beim Erstellen des Personenindexes danke ich SIMONE GUTT und MARTIN BORDE-MANN herzlichst. Wer hätte schon gedacht, daß WICK Italiener war und GIAN-CARLO mit Vorname hieß?

Ein ganz besonderer Dank gilt ALEXANDRA TEYNOR, die mir in den letzten Monaten dieser Arbeit wichtigen Beistand geleistet hat. Danke für den Zwetschgendatschi.

Zu guter Letzt möchte ich meinen Eltern FRANZ-JOSEF und IRMGARD JANSEN danken, die mich immer unterstützten.

*Stefan Jansen*  
*Freiburg, im November 2006*

*„I learned to distrust all physical concepts as the basis for a theory. Instead one should put one's trust in a mathematical scheme, even if the scheme does not appear at first sight to be connected with physics. One should concentrate on getting interesting mathematics.“*

DIRAC [1978]





# Einleitung

## Motivation und Ziel

Schon seit jeher haben sich die Physik und die Mathematik gegenseitig in ihren Entwicklungen beeinflusst. Häufig war es die Physik, die neue mathematische Konzepte benötigte, um die Forschung voranzutreiben, aber auch neue Erkenntnisse in der Mathematik erweiterten den Horizont der Physiker, so daß es möglich war, neue physikalische Konzepte zu finden. Beispielsweise brauchte NEWTON die Infinitesimal- und Integralrechnung, um die klassische Mechanik mathematisch formulieren zu können oder DIRAC die Distributionentheorie oder den Spektralkalkül von Operatoren auf HILBERT-Räumen für die Quantenmechanik. Andererseits wäre es EINSTEIN nicht möglich gewesen die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) zu formulieren, wenn nicht im 19. Jahrhundert die RIEMANNsche Geometrie hinreichend ausgearbeitet worden wäre. So gibt es von der Antike bis heute zahllose Beispiele, die diese parallele Entwicklung der beiden Gebiete untermauern.

Auch die vorliegende Arbeit wurde von uns mit dem Ziel verfaßt, eine weitere Brücke zwischen der Physik und der Mathematik zu schlagen. Motiviert durch physikalische Fragestellungen haben wir versucht, neue mathematische Konzepte zu formulieren, die im Rahmen der Physik ihre Anwendung finden können. Die drei wesentlichen in dieser Arbeit behandelten Gebiete wollen wir kurz beleuchten und ihre Bedeutung für die Physik in aller Kürze darlegen.

## Sternprodukte

Sternprodukte sind ein Versuch, *klassische Theorien* (insbesondere klassische Mechanik) zu quantisieren und stellen damit eine alternative Möglichkeit zur *kanonischen Quantisierung* dar. Man bezeichnet das Quantisieren mittels Sternprodukten auch als *Deformationsquantisierung*. Während die kanonische Quantisierung, die 1932 erstmals von VON NEUMANN [1996] mathematisch ansprechend formuliert worden ist<sup>1</sup>, einen funktional-analytischen Zugang bietet, sind Sternprodukte ein algebraischer bzw. geometrischer Zugang zur Quantisierung. Sternprodukte sind, wie wir in Kapitel 3 sehen werden, direkt aus der klassischen Theorie abgeleitet und daher ein sehr natürlicher Zugang zur Quantenmechanik. Eine Folge dessen ist, daß der *klassische Limes* („ $\hbar \rightarrow 0$ “) im Rahmen der Deformationsquantisierung sehr gut zu verstehen ist, da er aufgrund des konzeptuellen Aufbaus gleich mitgeliefert wird. Man geht von einer Mannigfaltigkeit  $M$  aus, die physikalisch dem Phasenraum entspricht, und betrachtet die kommutative Algebra der glatten, komplexwertigen

---

<sup>1</sup>Ein wichtiges Werk zur Quantenmechanik lieferte DIRAC schon 1930 [DIRAC 1982] – also einige Zeit vor VON NEUMANN, jedoch war seine Herangehensweise an die mathematischen Konzepte der Quantenmechanik sehr klassisch geprägt und daher nach heutiger Sicht der Dinge unzureichend.

gen Funktionen  $C^\infty(M)$  mit dem punktweise Produkt. Diese Algebra entspricht einer klassischen Observablenalgebra.

Der Übergang zu einer Quantentheorie geschieht indem man diese Algebra *deformiert*. Dies bedeutet das punktweise Produkt wird zu einem assoziativen, jedoch nicht mehr kommutativen Produkt, dem *Sternprodukt* der Form

$$f \star g = fg + \lambda C_1(f, g) + \lambda^2 C_2(f, g) + \dots$$

Dabei bezeichnen wir  $\lambda$  als den *Deformationsparameter* und  $C_n$  sind Bidifferentialoperatoren, die die Deformation „kodieren“. Elemente in der deformierten Algebra sind damit *formale Potenzreihen* der Form

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_n.$$

Das Produkt können wir als eine Störungsreihe in  $\lambda$  auffassen. Unter dem klassischen Limes verstehen wir die Abbildung  $\text{cl} : f \mapsto f_0$ , was einem „Vergessen der Quantenkorrekturen“ entspricht. Die Reihen bezeichnet man als *formal*, da es sich um ein algebraisches Konzept handelt, und der Parameter  $\lambda$  erstmal ausschließlich der Ordnung dient. Erst in einem weiteren Schritt, nämlich in einem konvergenten Rahmen, wie er beispielsweise von BEISER [2005] betrachtet wird, tritt an die Stelle des formalen Parameters eine reelle Zahl, das PLANCKsche Wirkungsquantum  $\hbar$ . Ein anderer Zugang zu konvergenten Sternprodukten ist die *strikte Deformationsquantisierung*. Dazu verweisen wir auf die Arbeiten von RIEFFEL [1993], LANDSMAN [1998], BIELIAVSKY [2002], HELLER *et al.* [2006] und BECHER [2006].

Der Vorteil des algebraischen Rahmens ist, daß man nicht über Konvergenz reden *muß*, also komplett auf funktional-analytische Aspekte der Quantisierung verzichtet, und somit eine größere Klasse von Algebren betrachten kann.

Bei der kanonischen Quantisierung ist das Bilden eines klassischen Limes weitaus diffiziler und oft ist es alles andere als trivial, einen Übergang zum Makroskopischen zu finden. Ein einfaches Beispiel dafür ist der Impulsoperator im Ortsraum  $P_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_i}$ , der bei „Vernachlässigung der Quantenkorrekturen“ nur die Null wäre.

Eine weitere Motivation, sich Sternprodukte anzusehen, ist die Tatsache, daß man auf sämtlichen symplektischen sowie POISSON-Mannigfaltigkeiten Sternprodukte konstruieren kann. Dies bedeutet, daß man diese Räume im Rahmen der Deformationsquantisierung *immer* quantisieren kann. Die kanonische Quantisierung versagt hier insofern, als daß sie keineswegs mehr kanonisch ist, sondern *ad hoc*-Lösungen verlangt. Der offensichtliche Nachteil der Deformationsquantisierung liegt im Fehlen eines Spektralkalküls. Zwar wurde in [BAYEN *et al.* 1977] eine Methode vorgestellt einige einfache Spektren zu berechnen, allerdings sind diese Ergebnisse alles andere als befriedigend. Bis heute gibt es (leider) keine sinnvolle Lösung dieses Problems, da man konvergente Sternprodukte braucht und diese sehr schwierig zu behandeln sind. Dies liegt insbesondere daran, daß  $\hbar$  eine dimensionsbehaftete Größe ist, deren Wert man durch ändern der Einheiten beliebig manipulieren kann, und somit nicht „klein“ im Sinne einer Störungsreihe ist.

## MORITA-Theorie und PICARD-Gruppoid

Auch die MORITA-Äquivalenz erfreut sich einer wichtigen Anwendung in der Physik. Ein zentrales Objekt sowohl der klassischen Mechanik wie auch der Quantenmechanik ist die *Observablenalgebra*. Observablenalgebren sind  $*$ -Algebren, das heißt Algebren mit einer  $*$ -Involution. Im speziellen ist das der klassischen Mechanik eine Funktionenalgebra auf einem Phasenraum mit der komplexen Konjugation und in der Quantenmechanik sind es (beschränkte) adjungierbare Operatoren auf einem HILBERT-Raum. Bei der MORITA-Theorie setzt man Objekte einer Kategorie, den Algebren, zueinander in Beziehung indem man die Klasse der Morphismen, über die Algebromorphismen hinaus, erweitert. Die Erweiterungen sind die sogenannte *Äquivalenzbimoduln*, und die Menge (oder Klasse) aller Äquivalenzbimoduln bezeichnet man dann als das *PICARD-Gruppoid*. Das PICARD-Gruppoid dient somit die MORITA-Äquivalenz auf eine elegante Art zu kodieren. Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß man mittels der MORITA-Äquivalenz Algebren klassifizieren kann. Dies spielt in der Physik aber eine wichtige Rolle, denn eine Eigenschaft von MORITA-äquivalenten Objekten (also Algebren) ist, daß sie eine äquivalente *Darstellungstheorie* haben. Dies spielt zum Beispiel in der axiomatischen Quantenfeldtheorie nach HAAG & KASTLER [1964] eine Rolle, bei der man *Superauswahlregeln* untersucht. Diese geben an wieviele irreduzible Darstellungen eine gegebene Observablenalgebra hat. Mit Hilfe der MORITA-Theorie kann man die Darstellungstheorie „komplizierter“ Algebren auf die Darstellungstheorie besser verstandener zurückführen.

Eine mit der Darstellungstheorie von Sternproduktalgebren verbundene Anwendung der MORITA-Äquivalenz ist der DIRAC-Monopol. Betrachtet man Äquivalenzbimodul von Sternproduktalgebren, so stellt sich die DIRACsche Quantisierungsbedingung für magnetische Monopole als eine Integralbedingung an die Klasse der beiden Sternprodukte heraus, und nur dann, wenn beide Sternproduktalgebren MORITA-äquivalent sind, ist diese Integralbedingung zu erfüllen. Eine detaillierte Ausführung findet man z. B. in [WALDMANN 2005b, Section 7.3] und [BURSZTYN & WALDMANN 2002, Section 4.2].

## HOPF-Algebren

Im Zuge des Versuchs eine vereinheitlichende Theorie von Quantentheorie und Gravitation (Quantengravitation) zu formulieren, wurden in der Physik HOPF-Algebren, die man auch unter dem Begriff *Quantengruppen* findet, entwickelt und diskutiert. HOPF-Algebren stellen ein verallgemeinerndes Konzept dar, um sich jenseits von Gruppen oder LIE-Algebren dem Begriff der *Symmetrie* zu nähern. Symmetrien spielen in der Physik an vielen Stellen eine wichtige Rolle. In der Festkörperphysik sind es *diskrete Symmetrien*, die beispielsweise Gitterstrukturen beschreiben (vgl. z. B. [LAX 2001]). Wir sind jedoch eher an *kontinuierlichen Symmetrien* interessiert, die sich in der Physik häufig in Form von LIE-Gruppen bzw. LIE-Algebren manifestieren. Einige in der Physik auftretende Beispiele sind zum einen Erhaltungsgrößen, die nach NOETHER [1918] einer Symmetrie entsprechen (Drehimpulserhaltung  $\Rightarrow$  Rotationsinvarianz, Impulserhaltung  $\Rightarrow$  Translationsinvarianz, Energieerhaltung  $\Rightarrow$  Homogenität der Zeit, etc.) und zum anderen Eichtheorien oder das Standardmodell. Daß HOPF-Algebren in diesem Zusammenhang ein interessantes Konzept sind, spiegelt sich in der Tatsache wider, daß sowohl die *Gruppenalgebren von LIE-Gruppen* als auch die *universell Einhüllenden von LIE-Algebren* HOPF-Algebren sind. Damit haben wir die beiden für die Physik wichtigen Fälle mittels eines „universelleren Formalismus“ abgedeckt, und uns zudem die Option

auf allgemeinere Symmetrien offengelassen.

## Aufbau und Ergebnisse der Arbeit

Die Arbeit ist in fünf Kapitel sowie zwei Anhänge eingeteilt.

In Kapitel 1 wollen wir einen Überblick über die MORITA-Theorie geben. Dabei werden wir – aufbauend auf einer für das Verständnis wichtigen mathematischen Einleitung – die drei wichtigen Ausprägungen der MORITA-Theorie diskutieren. Zuerst die *ringtheoretische Theorie*, die zur Klassifizierung von Darstellungen von Ringen entwickelt wurde und geschichtlich die Grundlage für die später entstandene *\*-MORITA-Theorie* beziehungsweise *starke MORITA-Theorie* bildet. Wir beschäftigen uns im wesentlichen mit den beiden letzteren, die beide eine MORITA-Theorie für *\*-Algebren* darstellen. Damit klassifizieren sie eine für die Physik interessante Kategorie von Algebren, den Observablenalgebren. Das wichtige Ergebnis, daß wir zur MORITA-Theorie beitragen, ist eine Erweiterung auf den  $H$ -äquivarianten Fall, wobei  $H$  eine HOPF-*\*-Algebra* ist. Die betrachteten *\*-Algebren* tragen nun eine, durch die Wirkung einer HOPF-*\*-Algebra* vorgegebene, Symmetrie. Wir haben herausgearbeitet wie und unter welchen Umständen man diese  $H$ -äquivariante MORITA-Theorie etablieren kann.

Eine konzeptionelle Fortführung des Kapitels 1 bildet Kapitel ?? . Dort beleuchten wir das PICARD-Gruppoid bzw. die PICARD-Gruppe näher. Auch hier interessiert uns insbesondere der  $H$ -äquivariante Fall. Das wahrscheinlich wichtigste Ergebnis der Arbeit ist die Untersuchung des Morphismus  $\text{Pic}_H \rightarrow \text{Pic}$  vom  $H$ -äquivarianten PICARD-Gruppoid in das „gewöhnliche“ PICARD-Gruppoid. Wir untersuchen den Kern sowie das Bild der Abbildung, und sind in der Lage den Kern vollständig zu charakterisieren und das Bild unter gewissem Umständen angeben zu können. Den Kern der Abbildung  $\text{Pic}_H \rightarrow \text{Pic}$  zu verstehen ist in diesem Rahmen insofern ein sehr schönes Ergebnis, da die Existenz eines für die MORITA-Äquivalenz notwendigen  $H$ -äquivarianten Äquivalenzbimoduls ein Hebungsproblem ist. Im allgemeinen ist dies an eine kohomologische Obstruktionen gebunden (siehe z. B. [GUILLEMIN *et al.* 2002]). Wir sind somit, mit den von uns entwickelten Techniken, in der Lage, anzugeben wie das  $H$ -äquivariante PICARD-Gruppoid aussieht. Das Bild der Abbildung  $\text{Pic}_H \rightarrow \text{Pic}$  können angeben, wenn es auf den jeweiligen *\*-Algebren* Impulsabbildungen gibt. Anschließend betrachten wir  $H$ -äquivariante MORITA-Invarianten, die wir durch die Wirkung eines  $H$ -äquivarianten PICARD-Gruppoids charakterisieren wollen. Hier haben wir eine Formulierung mittels der Kategorientheorie angegeben, so daß die Struktur, die eine MORITA-Invariante auszeichnet, deutlich wird. Mit diesen Mittel formulieren wir einige wichtige Beispiele für  $H$ -äquivariante MORITA-Theorie.

In Kapitel 2 ist es uns nun gelungen die  $H$ -äquivariante MORITA-Äquivalenz von Algeren und die gewöhnliche MORITA-Äquivalenz von sogenannten *Cross-Produktalgebren* in Beziehung zu setzen. Die Cross-Produktalgebra ist dabei eine *\*-Algebra* mit den „Informationen“ der *\*-Algebra* und der HOPF-*\*-Algebra*. Wie wir herausgearbeitet haben, ist der Übergang von einer *\*-Algebra* zur der korrespondierenden Cross-Produktalgebra funktoriell und liefert auf PICARD-Gruppoidniveau einen Gruppoidmorphismus. Abschließen werden wir das Kapitel mit einem einfachen, jedoch instruktiven Beispiel.

In Kapitel 3 geben wir eine Einführung in das Konzept der Sternprodukte. Ausgehend von der

Idee des Quantisierens geben wir eine Motivation, sich mit Sternprodukten auseinanderzusetzen. Dabei stellt ein flacher Phasenraum den einfachsten Fall dar, der die bekannten Sternprodukte für den  $\mathbb{R}^{2n}$  sowie den  $\mathbb{C}^n$  liefert. Aufbauend darauf axiomatisieren wir Sternprodukte im Sinne von BAYEN *et al.* [1977] und werden Sternprodukte für symplektische Mannigfaltigkeiten bzw. POISSON-Mannigfaltigkeiten definieren und deren wichtigste Eigenschaften erläutern, sowie grundlegende Definitionen angeben. Mit Hilfe der FEDOSOV-Konstruktion werden wir vorführen, wie man Sternprodukte auf beliebigen symplektischen Mannigfaltigkeiten mit einem symplektischen Zusammenhang konstruieren kann. Eine Erweiterung dieser Konstruktion wird uns zur Deformation von Vektorbündeln führen, die wir dazu noch in einem gruppeninvarianten Rahmen formulieren werden. Dies ist insofern interessant, da es ein erstes (sehr spezielles, aber wichtiges) Beispiel für die in Kapitel 4 behandelte  $H$ -äquivalente MORITA-Theorie von deformierten Algebren liefert.

Kapitel 4 verbindet die Sternprodukte mit dem algebraischen Konzept einer HOPF-Wirkung. Wir definieren (rein algebraisch)  $H$ -äquivalente Sternprodukte mit Hilfe von Impulsabbildungen. Die Formulierung unterscheidet sich insofern von bisherigen, da sie die Symmetrie durch eine HOPF-\*-Algebra zulassen. A posteriori geben wir dann eine geeignete HOPF-\*-Algebra an, so daß die rein algebraische Formulierung in die altbekannte, geometrisch motivierte Definition übergeht. Im weiteren führen wir deformierte Äquivalenzbimoduln ein, mit deren Hilfe wir MORITA-Äquivalenz von deformierten Algebren (und damit insbesondere von Sternprodukten) beschreiben können. Darüber gelangen wir zum PICARD-Gruppoid, dessen Objekte deformierte Algebren sind. Besonders interessant ist die *klassische Limes-Abbildung*, die auf PICARD-Gruppoidniveau einen Morphismus in das „klassische“ PICARD-Gruppoid induziert.

Die für die Arbeit relevanten mathematischen Grundlagen haben wir in einem Anhang zusammengetragen. Diese gehen an mancher Stelle über das hinaus, was im Hauptteil der Arbeit gebraucht wird.

In Anhang A findet man die algebraischen Grundlagen zu (geordneten) Ringen, formale Potenzreihen, HOPF-\*-Algebren, Cross-Produktalgebren, Verbänden und projektive Moduln. Insbesondere das Kapitel zu den Gruppen  $\mathrm{GL}(H, \mathcal{A})$ ,  $\mathrm{GL}_0(H, \mathcal{A})$ ,  $\mathrm{U}(H, \mathcal{A})$  und  $\mathrm{U}_0(H, \mathcal{A})$  sei dem Leser ans Herz gelegt, da diese in Kapitel ?? eine entscheidende Rolle spielen. In Anhang A.5 sind ein paar geometrische Grundlagen zusammengestellt. Interessant, da sie über das normale Lehrbuchwissen hinausgehen, sind insbesondere die Kapitel über symplektische Geometrie und  $G$ -invariante bzw.  $\mathfrak{g}$ -invariante Zusammenhänge. Am Ende der Arbeit findet sich ein Symbolverzeichnis und ein Personenindex, in dem wir alle namentlich erwähnten Personen aufgelistet haben.



# Kapitel 1

## MORITA-Äquivalenz

### 1.1 Grundlagen zur MORITA-Theorie

#### 1.1.1 Prä-HILBERT-Räume, \*-Algebren und Positivität

##### Prä-HILBERT-Räume

Im folgenden wollen wir Prä-HILBERT-Räume definieren, um später das verallgemeinernde Konzept der Prä-HILBERT-Moduln zu motivieren. Wir werden in dieser Arbeit eine leicht verallgemeinernde Version von Prä-HILBERT-Räumen benötigen, da wir nicht ausschließlich Räume über  $\mathbb{C}$  betrachten, sondern über einem Ring  $C$ . Dabei ist  $C = R(i)$  die komplexe Erweiterung des geordneten Rings  $R$  mit  $i^2 = -1$ . Diese Verallgemeinerung ist dadurch motiviert, daß wir uns später mit formal deformierten Algebren, also insbesondere Sternprodukten, auseinandersetzen. Sternprodukte sind  $\mathbb{C}[[\lambda]]$ -lineare Abbildungen, und in diesem Formalismus können wir die Kategorie beibehalten, wenn wir über formale Potenzreihen reden wollen. Somit denken wir insbesondere an die Ringe  $R = \mathbb{R}$  und  $R = \mathbb{R}[[\lambda]]$ . Es ist wichtig, daß der Ring  $R$  geordnet ist, damit wir das Konzept der Positivität implementieren können. Eine detaillierte Einführung in das Konzept von (geordneten) Ringen, sowie einfache und wichtige Beispiele haben wir in Kapitel A.1.1 zusammengestellt. Eine weitere Motivation, weshalb wir bei der Definition von Prä-HILBERT-Räumen den Ring  $C$  verwenden wollen, ist, daß man bei der herkömmlichen Definition wie sie in Lehrbüchern zu finden ist, nur die „Ringeigenschaften“ des Körpers  $\mathbb{C}$  braucht. Somit ist unsere Definition eine in gewisser Hinsicht sehr natürliche.

**Definition 1.1.1** (Prä-HILBERT-Raum).

Sei  $\mathcal{H}$  ein  $C$ -Vektorraum mit einer Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow C$ . Man nennt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein inneres Produkt, falls die Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sesquilinear ist, d. h. für alle  $\phi, \psi, \chi \in \mathcal{H}$  und  $s, t \in C$  gilt

i.)  $\langle \phi, s\psi + t\chi \rangle = s\langle \phi, \psi \rangle + t\langle \phi, \chi \rangle,$

ii.)  $\langle \phi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \phi \rangle}.$

Ein inneres Produkt heißt positiv semidefinit, falls  $\langle \phi, \phi \rangle \geq 0$  und positiv definit, falls  $\langle \phi, \phi \rangle > 0$  für alle  $\phi \neq 0$ . Ein  $C$ -Vektorraum mit einem positiv definiten inneren Produkt heißt Prä-HILBERT-Raum.

Man nennt ein inneres Produkt nichtausgeartet, falls  $\langle \phi, \psi \rangle = 0$  für alle  $\psi \in \mathcal{H}$  impliziert, daß  $\phi = 0$  ist. Den Ausartungsraum von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bezeichnen wir mit

$$\mathcal{H}^\perp = \{\phi \in \mathcal{H} \mid \langle \psi, \phi \rangle = 0 \text{ für alle } \psi \in \mathcal{H}\}. \quad (1.1.1)$$

Ein positives inneres Produkt kann damit nicht ausgeartet sein.

Ein wichtiges Handwerkszeug wird die CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung sein.

**Satz 1.1.2** (CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung).

Sei  $\mathcal{H}$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit positiv semidefinitem inneren Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , dann gilt

$$\langle \phi, \psi \rangle \langle \psi, \phi \rangle \leq \langle \phi, \phi \rangle \langle \psi, \psi \rangle. \quad (1.1.2)$$

*Beweis.* Der Beweis von Satz 1.1.2 findet sich beispielsweise für den Fall  $\mathbb{C} = \mathbb{C}$  in WEIDMANN [2000] oder LANG [1997].  $\square$

**Korollar 1.1.3** (Quotientenraum eines semidefiniten inneren Produkts).

Sei  $\mathcal{H}$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit einem positiv semidefiniten inneren Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Das durch

$$\langle [\phi], [\psi] \rangle = \langle \phi, \psi \rangle \quad (1.1.3)$$

für  $[\phi], [\psi] \in \mathcal{H}/\mathcal{H}^\perp$  definierte innere Produkt ist ein wohldefiniertes positiv definites inneres Produkt, und  $\mathcal{H}/\mathcal{H}^\perp$  wird zu einem Prä-HILBERT-Raum.

*Beweis.* Das Korollar ist eine direkte Konsequenz der CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung.  $\square$

**Bemerkung 1.1.4** (Formale Potenzreihen).

Es kann vorkommen, daß wir der Deutlichkeit halber auch von  $R[[\lambda]]$  reden werden. Hiermit soll herausgestellt werden, daß es sich beim Ring  $R$  um eine formale Potenzreihe handelt. In gewisser Hinsicht ist diese Schreibweise tautologisch, da der Ring  $R$  an sich bereits eine formale Potenzreihe sein kann.

Wir wollen nun die *Kategorie der Prä-HILBERT-Räume* über einem Ring  $\mathbb{C}$  definieren. Die Objekte sind natürlich die Prä-HILBERT-Räume, jedoch müssen wir eine passende Wahl für die Morphismen treffen. Als geeignet werden sich die adjungierbaren Abbildungen zwischen Prä-HILBERT-Räumen herausstellen. Motiviert ist dies durch den Satz von HELLINGER-TOEPLITZ, der insbesondere in der Quantenmechanik seine Anwendung findet.

**Definition 1.1.5** (HILBERT-Raum).

Ein HILBERT-Raum  $\mathfrak{H}$  ist ein vollständiger Prä-HILBERT-Raum über dem Körper  $\mathbb{C}$ .

Dabei bezeichnen wir einen Raum als *vollständig*, wenn jede CAUCHY-Folge konvergiert [WEIDMANN 2000].

**Satz 1.1.6** (Satz von HELLINGER-TOEPLITZ).

Seien  $\mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{H}_2$  HILBERT-Räume über  $\mathbb{C}$ , dann ist ein Operator  $A : \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_2$  genau dann adjungierbar, wenn  $A$  ein linearer und stetiger Operator ist.

*Beweis.* Der Beweis findet sich in einschlägiger Literatur, z. B. in [RUDIN 1991, S. 117].  $\square$



**Bemerkung 1.1.7** (Funktional-analytische Aspekte).

Für einen tieferen Einblick in die funktional-analytischen Aspekt, d. h. insbesondere des Spektralkalküls von Operatoren auf HILBERT-Räumen, sei auf [WERNER 2002; RUDIN 1991; HIRZEBRUCH & SCHARLAU 1991; GROSSMANN 1988] verwiesen. Da wir im weiteren nicht an Spektren oder anderen funktional-analytischen Betrachtungen interessiert sind, werden wir uns ausschließlich mit Prä-HILBERT-Räume beschäftigen.

Die adjungierbaren Abbildung stellen somit eine besonders interessante Klasse von Morphismen dar. Dies verleitet uns zu der folgenden Definition.

**Definition 1.1.8** (Adjungierbare Abbildungen).

Seien  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  zwei Prä-HILBERT-Räume über  $\mathbb{C}$  und  $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  eine Abbildung. Man nennt  $A$  adjungierbar, falls es eine Abbildung  $A^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$  gibt, so daß

$$\langle A\phi, \psi \rangle_2 = \langle \phi, A^*\psi \rangle_1 \quad (1.1.4)$$

für alle  $\phi \in \mathcal{H}_1$  und  $\psi \in \mathcal{H}_2$ . Man nennt  $A^*$  die adjungierte Abbildung zu  $A$ , und die Menge aller adjungierbaren Abbildungen von  $\mathcal{H}_1$  nach  $\mathcal{H}_2$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  bzw. mit  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  falls  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ .

**Lemma 1.1.9** (Adjungierte Abbildungen).

Seien  $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  und  $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$   $\mathbb{C}$ -lineare Abbildungen. Die adjungierten Abbildungen  $A^*, B^*, C^*$  sind eindeutig bestimmte,  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildungen und es gilt:

$$(aA + bB)^* = \bar{a}A^* + \bar{b}B^*, \quad (CA)^* = A^*C^*, \quad (A^*)^* = A, \quad (1.1.5)$$

für alle  $a, b \in \mathbb{C}$ . Ferner ist  $\text{id} = \text{id}^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .

*Beweis.* Die Linearität sowie die Eindeutigkeit erhält man aus der Nichtausgeartettheit des inneren Produkts, die restlichen Eigenschaften durch simples Nachrechnen.  $\square$

Damit gelangen wir zur Definition der Kategorie von Prä-HILBERT-Räumen über einem Ring  $\mathbb{C}$ .

**Definition 1.1.10** (Kategorie der Prä-HILBERT-Räume).

Die Kategorie  $\text{PräHilbert}(\mathbb{C})$  der Prä-HILBERT-Räume über  $\mathbb{C} = \mathbb{R}(\text{i})$  ist gegeben durch die Objekte, d. h. alle Prä-HILBERT-Räume über dem Ring  $\mathbb{C}$ , sowie die Morphismen zwischen den Objekten, die durch alle adjungierbaren Abbildungen zwischen je zwei Prä-HILBERT-Räumen über  $\mathbb{C}$  gegeben sind.

**Definition 1.1.11** (Operatoren vom Rang Eins).

Seien  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  Prä-HILBERT-Räume und  $\phi \in \mathcal{H}_2$ ,  $\psi \in \mathcal{H}_1$ , dann definiert man eine lineare Abbildung  $\Theta_{\phi, \psi} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  durch

$$\Theta_{\phi, \psi} \chi = \phi \langle \psi, \chi \rangle \quad (1.1.6)$$

für  $\chi \in \mathcal{H}_1$ . Man nennt  $\Theta_{\phi, \psi}$  einen Operator vom Rang Eins. Linearkombinationen solcher Operatoren nennt man Operatoren von endlichem Rang, deren Gesamtheit man mit  $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  bezeichnet. Analog zu den adjungierbaren Operatoren sei  $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) =: \mathcal{F}(\mathcal{H})$ .

**Proposition 1.1.12** (Operatoren von endlichem Rang).

Seien  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  und  $\mathcal{H}_3$  Prä-HILBERT-Räume über dem Ring  $\mathbb{C}$ . Dann gilt

- i.)  $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ .
- ii.) Die Operatoradjungtion

$$* : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$$

ist eine  $\mathbb{C}$ -antilineare Bijektion mit  $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)^* = \mathcal{F}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ .

- iii.)  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3) \cdot \mathcal{F}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$  und  $\mathcal{F}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3) \cdot \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$ .

*Beweis.* Ein Beweis hierzu findet sich beispielsweise in [WALDMANN 2004b]. □

### \*-Algebren

In diesem Kapitel werden wir das Konzept der \*-Algebren einführen. Dabei wird schnell klar, daß dieses Konzept in der Physik an vielen Stellen Verwendung findet, wie man an den Beispielen 1.1.15 sieht. Mittels der \*-Algebren können wir *positive Funktionale* definieren, denen eine ebenso wichtige Rolle zukommt, da sie die mathematische Beschreibung von Zuständen in der Physik entsprechen.

**Definition 1.1.13** (\*-Algebra).

Sei  $(\mathcal{A}, \cdot)$  eine assoziative Algebra über dem Ring  $\mathbb{C}$ . Man nennt eine Algebra  $\mathcal{A}$  eine \*-Algebra, falls sie mit einem antilinearen Antiautomorphismus  $* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  ausgestattet ist, so daß

$$(a^*)^* = a, \quad (a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*, \tag{1.1.7}$$

für alle  $a, b \in \mathcal{A}$ . Ist die Algebra mit einem Einselement  $1_{\mathcal{A}}$  ausgestattet, so gilt zusätzlich  $(1_{\mathcal{A}})^* = 1_{\mathcal{A}}$ . Wir bezeichnen die \*-Algebra mit  $(\mathcal{A}, \cdot, *)$ , bzw. wenn keine Verwechslung möglich ist nur mit  $\mathcal{A}$  und unterdrücken wie gewöhnlich die Verknüpfung und die Involution.

**Definition 1.1.14** (Kategorie der \*-Algebren).

Ein Morphismus von \*-Algebren ist ein Algebromorphismus  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  für den zusätzlich  $\phi(a^*) = \phi(a)^*$  gilt. Auf diesem Wege erhält man die Kategorie der \*-Algebren (mit Einselement) über  $\mathbb{C}$ , die man mit  $*\text{alg}(\mathbb{C})$  (bzw.  $*\text{Alg}(\mathbb{C})$ ) bezeichnet.

Wie wichtig \*-Algebren sind, werden wir an den folgenden Beispielen illustrieren.

**Beispiele 1.1.15** (\*-Algebren).

- i.) Der Ring  $\mathbb{C}$  ist auf natürliche Weise eine \*-Algebra mit Einselement über sich selbst. Die \*-Involution ist die komplexe Konjugation  $z \mapsto z^* = \bar{z}$ .
- ii.) Für jeden Prä-HILBERT-Raum  $\mathcal{H}$  bilden die adjungierbaren Operatoren  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  eine \*-Algebra. Die Involution ist durch Adjungieren gegeben, und  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$  ist ein \*-Ideal, wie wir bereits in Proposition 1.1.12 herausgestellt haben.
- iii.) Die Algebra  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$  ist auf natürliche Weise eine \*-Algebra (siehe 1.1.12). Sie besitzt i. a. kein Einselement.
- iv.) Die  $n \times n$ -Matrizen über einem Ring  $\mathbb{C}$  bilden die \*-Algebra  $M_n(\mathbb{C})$ . Die Verknüpfung ist die übliche Matrixmultiplikation und die \*-Involution ist durch  $(z_{ij})^* = (\bar{z}_{ji})$  gegeben. Ferner gilt  $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathcal{B}(\mathbb{C}^n) \cong \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ .

- v.) Sind  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zwei  $*$ -Algebren, so ist auch  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  eine  $*$ -Algebra. Die Involution der einzelnen Tensorfaktoren geschieht argumentweise  $(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$ , die Multiplikation ist kanonisch  $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$ , und beide Strukturen sind konsistent.
- vi.) Ist die Algebra  $\mathcal{A}$  eine  $*$ -Algebra, dann ist auch  $M_n(\mathcal{A}) := \mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{C})$  eine  $*$ -Algebra.
- vii.) Sei  $M$  eine nichtkompakte Mannigfaltigkeit. Die Algebra  $C_0^\infty(M)$ , der komplexen Funktionen mit kompaktem Träger auf  $M$  mit der punktweisen komplexen Konjugation  $C_0^\infty(M) \ni f \mapsto f^* = \bar{f}$  bilden eine kommutative  $*$ -Algebra, die allerdings kein Einselement besitzt.
- viii.) Die Algebra eines HERMITESchen Sternprodukts  $(C^\infty(M) [[\lambda]], \star, -)$  auf einer POISSON-Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine  $*$ -Algebra mit Einselement über dem Ring  $\mathbb{C} = \mathbb{C}[[\lambda]]$ . Die Involution ist durch die gewöhnliche komplexe Konjugation gegeben,  $(f \star g)^* = \overline{f \star g} = \bar{g} \star \bar{f} = g^* \star f^*$ . (wir werden später noch konkreter auf dieses Beispiel eingehen und verweisen auf Definitionen 3.4.8 und 3.4.11).
- ix.) Ein für diese Arbeit wichtiges Beispiel sind die *Cross-Produktalgebren*, die wir später detailliert einführen werden. Dabei sei  $\mathcal{A}$  eine  $*$ -Algebra und  $H$  eine HOPF- $*$ -Algebra mit einer  $*$ -Wirkung  $\triangleright$  auf  $\mathcal{A}$ . Die Algebra  $\mathcal{A} \rtimes H$  mit der Multiplikation

$$(a \otimes h) \cdot (a' \otimes h') := a(h_{(1)} \triangleright a') \otimes h_{(2)} h'$$

und der  $*$ -Involution  $(a \otimes h)^* := h_{(1)}^* \triangleright a^* \otimes h_{(2)}^*$  bilden eine  $*$ -Algebra mit dem Einselement  $1_{\mathcal{A}} \otimes 1_H$ . Eine ausführliche Beschreibung, sowie Verweise auf geeignete Literatur sind in Kapitel A.3 zu finden.

## Positivität

### Definition 1.1.16 (Positives Funktional und Zustand).

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $*$ -Algebra über einem Ring  $\mathbb{C}$ . Man bezeichnet ein lineares Funktional  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  als positiv, falls  $\omega(a^*a) \geq 0$  für alle  $a \in \mathcal{A}$  ist. Ein positives Funktional für das zusätzlich  $\omega(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathbb{C}}$  gilt bezeichnet man als Zustand.

### Bemerkungen 1.1.17 (Positives Funktional und Zustand).

- i.) Die Definition 1.1.16 schließt auch deformierte Algebren, d. h. insbesondere Sternprodukte, ein. Im Fall von Sternprodukten wird ein Funktional  $\omega \in \mathbb{C}[[\lambda]]$ -linear und nimmt Werte in  $\mathbb{C}[[\lambda]]$  an. Elemente in dem Ring  $\mathbb{R} = \mathbb{R}[[\lambda]]$  sind genau dann positiv, wenn der erste nicht-verschwindende Term positiv ist, d. h. ein Element

$$\mathbb{R} \ni r = \sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda^n r_n \quad (1.1.8)$$

ist genau dann positiv, wenn  $r_{n_0} > 0$  im Sinne von Definition A.1.8.

- ii.) Wie wir unter den Beispielen 1.1.15 gesehen haben, sind nicht alle interessanten  $*$ -Algebren mit einem Einselement ausgestattet. Daher kann man in einigen Fällen nicht von Zuständen reden. Im wesentlichen werden wir uns auf  $*$ -Algebren mit einem Einselement beschränken. Bei  $*$ -Algebra mit Einselement über einem Ring  $\mathbb{C} = \hat{\mathbb{C}}$ , der sogar ein Körper ist, kann man durch Normierung aus einem linearen Funktional einen Zustand gewinnen.

**Lemma 1.1.18** (CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung für positive Funktionale).

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $*$ -Algebra und  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  ein lineares positives Funktional, dann gilt

- i.)  $\omega(a^*b) = \overline{\omega(b^*a)}$ . Besitzt die Algebra ein Einselement  $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ , so ist insbesondere  $\omega(a^*) = \overline{\omega(a)}$  und aus  $\omega(1_{\mathcal{A}}) = 0$  folgt  $\omega = 0$ .
- ii.)  $\omega(a^*b)\overline{\omega(a^*b)} \leq \omega(a^*a)\omega(b^*b)$ .

Mit Hilfe der linearen positiven Funktionale sind wir nun in der Lage positive Algebraelemente zu definieren.

**Definition 1.1.19** (Positive Algebraelemente – die Mengen  $\mathcal{A}^+$  und  $\mathcal{A}^{++}$ ).

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $*$ -Algebra über dem Ring  $\mathbb{C}$ . Man bezeichnet ein Element  $a \in \mathcal{A}$  als positiv, falls  $\omega(a) > 0$  für jedes beliebige positive Funktional  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ . Die Menge aller dieser Elemente sei mit  $\mathcal{A}^+$  bezeichnet:

$$\mathcal{A}^+ = \{a \in \mathcal{A} \mid \omega(a) > 0 \text{ für alle positiven } \omega\}. \quad (1.1.9)$$

Ferner definiert man

$$\mathcal{A}^{++} = \left\{a \in \mathcal{A} \mid a = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i^* b_i, \text{ mit } 0 < \beta_i \in \mathbb{R} \text{ und } b_i \in \mathcal{A}\right\}. \quad (1.1.10)$$

Es liegt nah, positive Abbildungen zu betrachten, die positive Elemente einer  $*$ -Algebra auf positive Elemente einer weiteren  $*$ -Algebra abbilden.

**Definition 1.1.20** (Positive und vollständig positive Abbildungen).

Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$   $*$ -Algebren. Man bezeichnet eine lineare Abbildung  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  als positiv, wenn für alle  $a \in \mathcal{A}^+$  gilt  $\Phi(a) \in \mathcal{B}^+$ . Ferner nennt man  $\Phi$  vollständig positiv, wenn die komponentenweise Erweiterung auf  $\Phi : M_n(\mathcal{A}) \rightarrow M_n(\mathcal{B})$  positiv für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist.

**Bemerkungen 1.1.21.**

- i.) Offensichtlich ist  $\mathcal{A}^{++} \subseteq \mathcal{A}^+$ , da wir aufgrund der Linearität von  $\omega$  jedes Element  $a \in \mathcal{A}^{++}$  schreiben können als

$$\omega(a) = \omega\left(\sum_i \beta_i b_i^* b_i\right) = \sum_i \underbrace{\beta_i}_{>0} \underbrace{\omega(b_i^* b_i)}_{>0} > 0. \quad (1.1.11)$$

Es kann jedoch Elemente in  $\mathcal{A}^+$  geben, die sich nicht als positive Linearkombination von Quadraten schreiben lassen.

- ii.) Bei  $C^*$ -Algebren ist  $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^{++}$ , da jedes positive Element in einer  $C^*$ -Algebra eine eindeutige Wurzel besitzt, so daß  $a = (\sqrt{a})^2$  geschrieben werden kann. Wir verweisen auf [SAKAI 1971; KADISON & RINGROSE 1997a, b; LANDSMAN 1998].

### 1.1.2 Prä-HILBERT-Moduln und Darstellungen

Wir wollen nun eine Verallgemeinerung des Konzepts der Prä-HILBERT-Räume darlegen, die *Prä-HILBERT-Moduln*. Diese werden bei der Klassifikation von Algebren mit Hilfe der MORITA-Theorie ein wichtiges Werkzeug sein.

**Definition 1.1.22** (Innerer Produktmodul und Prä-HILBERT Modul).

Sei  $\mathcal{D}$  eine  $*$ -Algebra über dem Ring  $\mathbb{C}$ . Ein innerer Produktmodul ist ein  $\mathcal{D}$ -Rechtsmodul mit einem inneren Produkt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}} : \mathcal{H}_{\mathcal{D}} \times \mathcal{H}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{D}, \quad (1.1.12)$$

mit den folgenden Eigenschaften.

- i.) Das innere Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$  ist  $\mathbb{C}$ -sesquilinear, d. h. linear im zweiten Argument und antilinear im ersten, so daß  $\langle x, ry + sz \rangle_{\mathcal{D}} = r\langle x, y \rangle_{\mathcal{D}} + s\langle x, z \rangle_{\mathcal{D}}$  für alle  $x, y, z \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}}$  und alle  $r, s \in \mathbb{C}$ .
- ii.)  $\langle x, y \rangle_{\mathcal{D}} = \langle y, x \rangle_{\mathcal{D}}^*$  für alle  $x, y \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}}$
- iii.) Das innere Produkt ist  $\mathcal{D}$ -rechtslinear  $\langle x, y \cdot d \rangle_{\mathcal{D}} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{D}} d$  für alle  $x, y \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}}$  und  $d \in \mathcal{D}$ .
- iv.) Das innere Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$  ist nichtausgeartet, das heißt für  $\langle x, \cdot \rangle_{\mathcal{D}} = \langle y, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$  ist  $x = y$ , und aus  $\langle x, \cdot \rangle_{\mathcal{D}} \equiv 0$  folgt  $x = 0$ .

Ferner spricht man von einem Prä-HILBERT-Modul, wenn zusätzlich noch die folgende Bedingung erfüllt ist:

- v.) Das innere Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$  ist vollständig positiv. Dies bedeutet, daß für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}}$  die Matrix  $(\langle x_i, x_j \rangle_{\mathcal{D}}) \in M_n(\mathcal{D})^+$  ist.

**Definition 1.1.23** (Vollheit eines inneren Produkts).

Sei  $\mathcal{D}$  eine  $*$ -Algebra über dem Ring  $\mathbb{C}$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}} : \mathcal{H}_{\mathcal{D}} \times \mathcal{H}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{D}$  ein  $\mathcal{D}$ -wertiges inneres Produkt. Man nennt das innere Produkt voll, falls die  $\mathbb{C}$ -lineare Hülle des inneren Produkts die ganze Algebra aufspannt, d. h.

$$\mathbb{C}\text{-span} \{ \langle x, y \rangle_{\mathcal{D}} \mid \text{für } x, y \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}} \} = \mathcal{D}. \quad (1.1.13)$$

Nicht alle Algebren sind als Hilfsalgebren geeignet, daher wollen wir definieren, wann eine Algebra  $\mathcal{D}$  für unsere Zwecke zulässig ist.

**Definition 1.1.24** (Zulässige Algebra  $\mathcal{D}$ ).

Man nennt eine Algebra  $\mathcal{D}$  zulässig, falls für jeden Prä-HILBERT-Modul  $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$  das innere Produkt positiv definit ist, d. h. für  $\langle x, x \rangle_{\mathcal{D}} = 0$  ist  $x = 0$ .

**Bemerkungen 1.1.25** (Innerer Produktmodul und Prä-HILBERT-Modul).

- i.) Die Definition für einen inneren Produktmodul oder einen Prä-HILBERT  $\mathcal{B}$ -Linksmoduln  ${}_B\mathcal{H}$  mit einem  $\mathbb{C}$ -sesquilinearen inneren Produkt  ${}_B\langle \cdot, \cdot \rangle : {}_B\mathcal{H} \times {}_B\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{B}$  verläuft analog. Allerdings ist ein solches inneres Produkt  $\mathbb{C}$ -linear im ersten Argument und mit einer Linksmultiplikation von  $\mathcal{B}$  verträglich, so daß die folgenden Bedingungen gelten  ${}_B\langle rx + sy, z \rangle = r{}_B\langle x, z \rangle + s{}_B\langle y, z \rangle$  und  ${}_B\langle b \cdot x, y \rangle = b{}_B\langle x, y \rangle$  für alle  $b \in \mathcal{B}$ ,  $x, y, z \in {}_B\mathcal{H}$  und  $r, s \in \mathbb{C}$ .
- ii.) Für den Fall  $\mathcal{D} = \mathbb{C}$  geht die Definition 1.1.22 in die eines Prä-HILBERT-Raums (Definition 1.1.1) über. Einen Beweis für die vollständige Positivität des inneren Produkts  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$  für Prä-HILBERT-Räume findet man in [BURSZTYN & WALDMANN 2001b, App. A]. Es stellt sich heraus, daß vollständige Positivität dort bereits aus der Positivität von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$  folgt.
- iii.) Definition 1.1.22 verallgemeinert desweiteren HILBERT-Moduln über  $C^*$ -Algebren, wie sie in LANCE [1995] behandelt werden. Die vollständige Positivität ist auch hier eine direkte Folge der Positivität des inneren Produkts [LANCE 1995, Lemma 4.2].

- iv.) Die Definitionen zu adjungierbaren Abbildungen und Operatoren endlichen Rangs sind identisch zu denen in Kapitel 1.1.1. Insbesondere sind die bei Prä-HILBERT-Moduln die adjungierbaren Abbildung eindeutig, und es gilt für alle  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{D}})$  Lemma 1.1.9, was an der Nichtausgeartetheit des inneren Produkts liegt.
- v.) Eine Hilfsalgebra  $\mathcal{D}$  ist immer dann zulässig, wenn es genügend viele positive lineare Funktionale  $\omega : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  gibt, so daß für HERMITESche Elemente  $d = d^* \neq 0$  ein Funktional  $\omega(d) \neq 0$  existiert und  $d + d = 0$  ist, folgt daß  $d = 0$  ist.

**Beispiel 1.1.26** (HERMITESches Vektorbündel).

Ein wichtiges Beispiel für die Prä-HILBERT-Moduln kommt aus der Differentialgeometrie. Sei  $E \xrightarrow{\pi} M$  ein komplexes Vektorbündel mit einer HERMITESchen Fasermetric  $h$ , dann ist der  $C^\infty(M)$ -Rechtsmodul  $\Gamma^\infty(E)_{C^\infty(M)}$  mit dem inneren Produkt  $\langle s, s' \rangle(x) := h_x(s(x), s'(x))$  mit  $x \in M$  und  $s, s' \in \Gamma^\infty(E)$  ein Prä-HILBERT-Modul. Die adjungierbaren Abbildungen sind die Schnitte im Endomorphismenbündel  $\mathcal{B}(\Gamma^\infty(E)_{C^\infty(M)}) = \Gamma^\infty(\text{End}(E))$  mit der kanonischen Wirkung auf  $\Gamma^\infty(E)$ . Die \*-Involution wird durch die Fasermetric  $h$  induziert.

**Definition 1.1.27** (\*-Darstellung einer \*-Algebra).

Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{D}$  \*-Algebren über dem Ring  $\mathbb{C}$ , und  $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$  ein Prä-HILBERT-Modul. Eine \*-Darstellung  $(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}, \pi)$  ist das Paar bestehend aus einem Prä-HILBERT-Modul  $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$  und einem \*-Homomorphismus  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{D}})$ , d. h. es gilt für alle  $a, b \in \mathcal{A}$

$$i.) \quad \pi(ab) = \pi(a)\pi(b),$$

$$ii.) \quad \pi(a^*) = \pi(a)^*.$$

Man bezeichnet eine \*-Darstellung  $(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}, \pi)$  ferner als stark nichtausgeartet, wenn

$$\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}_{\mathcal{D}} = \mathcal{H}_{\mathcal{D}}. \quad (1.1.14)$$

Damit wird  $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$  zu einem  $(\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}), \mathcal{D})$ -Bimodul (vgl. Bemerkungen 1.1.37). Eine \*-Darstellung  $(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}, \pi)$  ist immer stark nichtausgeartet, falls die dargestellte \*-Algebra  $\mathcal{A}$  ein Einselement  $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$  besitzt, da  $\pi(1_{\mathcal{A}}) = \text{id}_{\mathcal{H}_{\mathcal{D}}}$ .

**Definition 1.1.28** (Verschränkungsoperator (Intertwiner)).

Seien  $(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}, \pi)$  und  $(\mathcal{K}_{\mathcal{D}}, \rho)$  zwei \*-Darstellungen einer \*-Algebra  $\mathcal{A}$ , so bezeichnet man eine Abbildung  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}, \mathcal{K}_{\mathcal{D}})$  als Verschränkungsoperator oder Intertwiner, falls

$$T\pi(a) = \rho(a)T \quad (1.1.15)$$

für alle  $a \in \mathcal{A}$  ist.

**Definition 1.1.29** (Kategorie der \*-Darstellungen auf Prä-HILBERT-Moduln).

Man bezeichnet die Kategorie der \*-Darstellungen der \*-Algebra  $\mathcal{A}$  auf inneren Produkt  $\mathcal{D}$ -Rechtsmodul mit  $\text{*mod}_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$ . Die Objekte sind die \*-Darstellungen und die Morphismen die Verschränkungsoperatoren. Ferner bezeichnet man die Unterkategorie der \*-Darstellungen auf Prä-HILBERT-Moduln mit  $\text{*rep}_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$ . Sind die \*-Darstellungen außerdem noch stark nichtausgeartet, so werden die Kategorien mit  $\text{*Mod}_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$  bzw.  $\text{*Rep}_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$  bezeichnet.

### 1.1.3 Moduln und Bimoduln

Da für die MORITA-Theorie die Bimoduln eine wichtige Rolle spielen werden, werden wir die wichtigen Definitionen kurz zusammenfassen.

**Definition 1.1.30** (Kategorien der R-Moduln).

Sei  $R$  ein Ring. Man bezeichnet die Kategorie der  $R$ -Linksmoduln mit  $R\text{-mod}$  und die Kategorie der  $R$ -Rechtsmoduln mit  $\text{mod-}R$ . Die Objekte der Kategorie sind die Moduln, die Morphismen die Modulmorphismen,

$$T : {}_R\mathcal{E} \rightarrow {}_R\mathcal{E}', \quad {}_R\mathcal{E} \ni x \mapsto T(x) \in {}_R\mathcal{E}', \quad (1.1.16)$$

so daß  $T(r \cdot x) = r \cdot T(x)$  für alle  $r \in R$  und alle  $x \in {}_R\mathcal{E}$  ist. Für  $R$ -Rechtsmoduln ist die Definition analog. Kurz schreiben wir

$$R\text{-mod} = \{{}_R\mathcal{E} \mid {}_R\mathcal{E} \text{ ist } R\text{-Linksmodul}\} \quad \text{und} \quad \text{mod-}R = \{\mathcal{E}_R \mid \mathcal{E}_R \text{ ist } R\text{-Rechtsmodul}\}. \quad (1.1.17)$$

Gilt zusätzlich, daß  $R \cdot {}_R\mathcal{E} = {}_R\mathcal{E}$  bzw.  $\mathcal{E}_R \cdot R = \mathcal{E}_R$  so bezeichnet man die Kategorien mit  $R\text{-Mod}$  bzw.  $\text{Mod-}R$ . Analog definiert man für eine gegebene Algebra  $\mathcal{A}$  die Kategorien  $\mathcal{A}\text{-mod}$ ,  $\mathcal{A}\text{-Mod}$ ,  $\text{mod-}\mathcal{A}$  und  $\text{Mod-}\mathcal{A}$ .

**Bemerkung 1.1.31** (Kategorie der  $R$ -Moduln und  $\mathcal{A}$ -Moduln).

Im Fall von Ringen sind die Definitionen von  $R\text{-Mod}$  bzw.  $\text{Mod-}R$  tautologisch, da in unserer Definition A.1.2 jeder Ring ein Einselement besitzt und damit jeder  $R$ -Modul entweder in  $R\text{-Mod}$  oder  $\text{Mod-}R$  ist. In der Literatur wird jedoch nicht immer gefordert, daß  $1_R \in R$  ist (vgl. beispielsweise [GERRITZEN 1994]).

Für  $\mathcal{A}$ -Moduln ist diese Unterscheidung jedoch wichtig, da es wichtige Beispiele für Algebren ohne Einselement gibt (vgl. Beispiele 1.1.15). Beschränkt man sich auf die Kategorien  $\mathcal{A}\text{-Mod}$  bzw.  $\text{Mod-}\mathcal{A}$ , so umgeht man technische Schwierigkeiten, die beispielsweise in [BURSZTYN & WALDMANN 2003] beleuchtet werden.

**Definition 1.1.32** (Bimodul).

Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  Algebren über einem Ring  $C$ . Man bezeichnet einen  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \in \text{Mod-}\mathcal{A}$ , der gleichzeitig ein  $\mathcal{B}$ -Linksmodul  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E} \in \mathcal{B}\text{-Mod}$  ist als  $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ -Bimodul  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ , falls zusätzlich die Bedingung

$$(b \cdot x) \cdot a = b \cdot (x \cdot a) \quad (1.1.18)$$

für alle  $a \in \mathcal{A}$  sowie  $b \in \mathcal{B}$  und  $x \in {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  erfüllt ist.

**Bemerkung 1.1.33** (Bimodul).

Wir haben bei der Definition bewußt die Kategorien  $\text{Mod-}\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{B}\text{-Mod}$  gewählt um „pathologische“ Bimoduln auszuschließen. Sind die Algebren mit einem Einselement ausgestattet, so möchten wir insbesondere die Eigenschaften  $1_{\mathcal{B}} \cdot x = x$  und  $x \cdot 1_{\mathcal{A}} = x$  für alle  $x \in {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ .

Für die später behandelte \*- bzw. starke MORITA-Äquivalenz werden sich Bimoduln für \*-Algebren über dem Ring  $C$ , die zudem mit zwei inneren Produkten ausgestattet sind, als besonders nützlich

herausstellen. Daher wollen wir Bimoduln  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  betrachten, die mit einem  $\mathcal{B}$ -wertigen sowie einem  $\mathcal{A}$ -wertigen inneren Produkt ausgestattet sind, und diese mit  $({}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, {}_{\mathcal{B}}\langle \cdot, \cdot \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  bezeichnen. Wir werden ferner fordern, daß diese inneren Produkte mit den Modulstrukturen und miteinander verträglich sind.

**Definition 1.1.34** (Bimodulmorphismus).

Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  zwei Algebren über dem Ring  $\mathbb{C}$  und  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  sowie  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}'_{\mathcal{A}}$  zwei  $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ -Bimoduln. Man nennt die Abbildung

$$T : {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \ni x \mapsto T(x) \in {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}'_{\mathcal{A}} \quad (1.1.19)$$

einen Bimodulmorphismus, falls für alle Elemente  $x \in {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ , alle  $b \in \mathcal{B}$  und  $a \in \mathcal{A}$

$$T(b \cdot x \cdot a) = b \cdot T(x) \cdot a \quad (1.1.20)$$

gilt. Desweiteren nennt man den Bimodulmorphismus isometrisch, falls die Algebren  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}^*$ -Algebren sind und für die inneren Produkte

$$\langle T(x), T(y) \rangle^{\varepsilon'} = \langle x, y \rangle^{\varepsilon} \quad (1.1.21)$$

gilt.

**Definition 1.1.35** (Kompatibilität Bimodul).

Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}^*$ -Algebren und sei weiter  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  ein  $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ -Bimodul mit  $\mathcal{A}$ -wertigem inneren Produkt, dann nennt man das innere Produkt kompatibel oder verträglich mit der  $\mathcal{B}$ -Linksmodulstruktur, falls

$$\langle b \cdot x, y \rangle_{\mathcal{A}} = \langle x, b^* \cdot y \rangle_{\mathcal{A}} \quad (1.1.22)$$

für alle  $b \in \mathcal{B}$  und alle  $x, y \in {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ . Analog ist die  $\mathcal{A}$ -Rechtswirkung kompatibel mit einem  $\mathcal{B}$ -wertigen inneren Produkt falls

$${}_{\mathcal{B}}\langle x, y \cdot a \rangle = {}_{\mathcal{B}}\langle x \cdot a^*, y \rangle \quad (1.1.23)$$

für alle  $a \in \mathcal{A}$  und alle  $x, y \in {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ .

Sei nun ein  $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ -Bimodul  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  mit einem  $\mathcal{B}$ -wertigen und einem  $\mathcal{A}$ -wertigen inneren Produkt ausgestattet, so sind die beiden inneren Produkte a priori völlig unabhängig voneinander. Wir benötigen später jedoch eine Verträglichkeit der beiden inneren Produkte.

**Definition 1.1.36** (Verträglichkeit der inneren Produkte).

Gegeben ein Bimodul  $({}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, {}_{\mathcal{B}}\langle \cdot, \cdot \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$ . Man nennt die beiden inneren Produkte kompatibel oder verträglich, falls für alle  $x, y, z \in {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$

$${}_{\mathcal{B}}\langle x, y \rangle \cdot z = x \cdot \langle y, z \rangle_{\mathcal{A}} \quad (1.1.24)$$

gilt.

**Bemerkung 1.1.37.**

Sei  $(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}, \pi)$  eine  $*$ -Darstellung der  $*$ -Algebra  $\mathcal{A}$ , so ist  $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$  auf kanonische Weise ein Bimodul, da  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{D}})$  von links auf  $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$  wirkt und  ${}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{D}})}\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$  zu einem  $(\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}), \mathcal{D})$ -Bimodul macht. Das innere Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$  ist per Definition 1.1.8 kompatibel mit der  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{D}})$ -Linksmodulstruktur.



### 1.1.4 Tensorprodukte und RIEFFEL-Induktion von \*-Darstellungen

Ziel dieses Kapitels ist es einen Funktor zwischen zwei Kategorien von \*-Darstellungen anzugeben. Die folgenden Ideen gehen auf RIEFFEL [1974a, b] zurück. Die Darstellung dieses Kapitels orientiert sich im wesentlichen an [BURSZTYN & WALDMANN 2003].

Gegeben zwei \*-Algebren  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  über einem Ring  $\mathbb{C}$ . Sei  $(\mathcal{H}_{\mathcal{B}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}})$  ein  $\mathcal{B}$ -Rechtsmodul mit einem  $\mathcal{B}$ -wertigen inneren Produkt und  $({}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  ein Bimodul mit einem  $\mathcal{A}$ -wertigen inneren Produkt, das kompatibel mit der  $\mathcal{B}$ -Linkswirkung ist. Wir betrachten nun das Tensorprodukt  $\mathcal{H}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  über der Algebra  $\mathcal{B}$ .

**Lemma 1.1.38** (Inneres Produkt auf  $\mathcal{H}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ ).

Auf dem Tensorprodukt  $\mathcal{H}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  existiert ein wohldefiniertes  $\mathcal{A}$ -wertiges inneres Produkt via

$$\langle x_1 \otimes_{\mathcal{B}} y_1, x_2 \otimes_{\mathcal{B}} y_2 \rangle_{\mathcal{A}}^{\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}} := \langle y_1, \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathcal{B}}^{\mathcal{H}} \cdot y_2 \rangle_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}} \quad (1.1.25)$$

für alle  $x_1, x_2 \in \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$  und  $y_1, y_2 \in {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ .

*Beweis.* Da wir bisher keine Forderungen bezüglich Positivität oder Ausgeartetheit an die inneren Produkte gestellt haben, müssen lediglich  $\mathbb{C}$ -Sesquilinearität, die Kompatibilität mit der  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodulstruktur und das Verhalten unter der \*-Involution geprüft werden. Das innere Produkt ist jedoch so konstruiert, daß diese Forderungen erfüllt sind, vergleiche [RIEFFEL 1972, 1974b, a; BURSZTYN & WALDMANN 2003].  $\square$

**Definition 1.1.39** (Ausartungsraum von  $\mathcal{H}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ ).

Wir bezeichnen den Ausartungsraum von  $\mathcal{H}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  bezüglich des inneren Produktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}^{\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}}$  mit  $(\mathcal{H}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}})^{\perp}$ .

Auf dem Quotienten  $(\mathcal{H}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}})/(\mathcal{H}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}})^{\perp}$  existiert nun ein induziertes, nichtausgeartetes inneres Produkt, das wir ebenfalls mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}^{\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}}$  bezeichnen. Damit sind wir nun in der Lage das innere Tensorprodukt  $\widehat{\otimes}$  zu definieren.

**Definition 1.1.40** (Inneres Tensorprodukt  $\widehat{\otimes}$ ).

Seien  $(\mathcal{H}_{\mathcal{B}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}})$  ein  $\mathcal{B}$ -Rechtsmodul und  $({}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  ein mit der  $\mathcal{B}$ -Linkswirkung kompatibler Bimodul mit einem  $\mathcal{A}$ -wertigen inneren Produkt, so definiert man das innere Tensorprodukt  $\widehat{\otimes}_{\mathcal{B}}$  über der Algebra  $\mathcal{B}$  von  $(\mathcal{H}_{\mathcal{B}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}})$  und  $({}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  mittels

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{B}} {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} := \left( (\mathcal{H}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}) / (\mathcal{H}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}})^{\perp}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}^{\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}} \right). \quad (1.1.26)$$

**Bemerkung 1.1.41** (Ausartungsräume bei innerem Tensorprodukt).

Sei nun  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  ein Bimodul mit einem  $\mathcal{A}$ -wertigen und einem  $\mathcal{B}$ -wertigen inneren Produkt, so ist erstmal nicht eindeutig, welchen Ausartungsraum man herausteilen muß. Sind die beiden inneren Produkte kompatibel (Gleichung (1.1.24)), so sind beide Ausartungsräume identisch. Für die \*- und starke MORITA-Äquivalenz sind genau diese Bimoduln von Interesse. Wir werden daher  $\widetilde{\otimes}$  statt  $\widehat{\otimes}$  verwenden, wenn wir ausdrücken wollen, daß zwei kompatible innere Produkte involviert sind. Die funktoriellen Eigenschaften von  $\widetilde{\otimes}$  und  $\widehat{\otimes}$  unterscheiden sich nicht.

**Lemma 1.1.42** (Kanonische Linkswirkung bei innerem Tensorprodukt).

Seien  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$   $*$ -Algebren über dem Ring  $\mathbb{C}$ , und  $({}_c\mathcal{H}_B, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$  bzw.  $({}_B\mathcal{E}_A, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$  sind mit der jeweiligen Linkswirkung verträgliche Bimoduln mit innerem Produkt, dann hat  ${}_c\mathcal{H}_B \widehat{\otimes}_B {}_B\mathcal{E}_A$  eine kanonische, mit dem inneren Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A^{\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}}$  verträgliche  $\mathcal{C}$ -Linkswirkung.

*Beweis.* Der Beweis ist eine einfache Rechnung. Sei nun  $c \in \mathbb{C}$ ,  $x_1, x_2 \in {}_c\mathcal{H}_B$  und  $y_1, y_2 \in {}_B\mathcal{E}_A$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \langle c \cdot (x_1 \otimes_B y_1), x_2 \otimes_B y_2 \rangle_A^{\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}} &= \langle (c \cdot x_1) \otimes_B y_1, x_2 \otimes_B y_2 \rangle_A^{\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}} \\ &= \langle y_1, \langle c \cdot x_1, x_2 \rangle_B^{\mathcal{H}} \cdot y_2 \rangle_A^{\mathcal{E}} \\ &= \langle y_1, \langle x_1, c^* \cdot x_2 \rangle_B^{\mathcal{H}} \cdot y_2 \rangle_A^{\mathcal{E}} \\ &= \langle x_1 \otimes_B y_1, (c^* \cdot x_2) \otimes_B y_2 \rangle_A^{\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}} \\ &= \langle x_1 \otimes_B y_1, c^* \cdot (x_2 \otimes_B y_2) \rangle_A^{\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 1.1.43** (Assoziativität von  $\widehat{\otimes}$ ).

Seien  $(\mathcal{H}_B, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$  ein  $\mathcal{B}$ -Rechtsmodul und  $({}_B\mathcal{E}_A, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$  bzw.  $({}_A\mathcal{F}_C, \langle \cdot, \cdot \rangle_C)$  mit der jeweiligen Linkswirkung kompatible Bimoduln, so existiert ein natürlicher isometrischer Isomorphismus, so daß  $\widehat{\otimes}$  assoziativ wird:

$$({}_B\mathcal{H} \widehat{\otimes}_B {}_B\mathcal{E}_A) \widehat{\otimes}_A {}_A\mathcal{F}_C \cong {}_B\mathcal{H} \widehat{\otimes}_B ({}_B\mathcal{E}_A \widehat{\otimes}_A {}_A\mathcal{F}_C). \quad (1.1.27)$$

*Beweis.* Die Assoziativität wird durch die Assoziativität des algebraischen Tensorprodukts induziert. Die Isometrie der inneren Produkte ist eine einfache Rechnung. □

**Lemma 1.1.44** (Verträglichkeit von  $\widehat{\otimes}$  mit Morphismen).

Seien die Bimoduln  $({}_B\mathcal{E}_A, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$ ,  $({}_B\mathcal{E}'_A, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$  und  $({}_A\mathcal{F}_C, \langle \cdot, \cdot \rangle_C)$ ,  $({}_A\mathcal{F}'_C, \langle \cdot, \cdot \rangle_C)$  gegeben, wobei die Linkswirkung jeweils kompatibel mit den inneren Produkten sei. Ferner seien  $S \in \mathcal{B}({}_B\mathcal{E}_A, {}_B\mathcal{E}'_A)$  und  $T \in \mathcal{B}({}_A\mathcal{F}_C, {}_A\mathcal{F}'_C)$ . Das algebraische Tensorprodukt  $S \otimes_A T$  induziert einen wohldefinierten Bimodulmorphismus  $S \widehat{\otimes}_A T : {}_B\mathcal{E}_A \widehat{\otimes}_A {}_A\mathcal{F}_C \rightarrow {}_B\mathcal{E}'_A \widehat{\otimes}_A {}_A\mathcal{F}'_C$ . Das Adjungieren erfolgt komponentenweise und falls  $S$  und  $T$  isometrisch sind, dann ist es auch  $S \widehat{\otimes}_A T$ .

Eine wichtige Frage für das weitere Vorgehen ist nun, ob das innere Tensorprodukt vollständig positive innere Produkte erhält. Wie von BURSZTYN & WALDMANN [2003] gezeigt, ist dies der Fall.

**Satz 1.1.45** ([BURSZTYN & WALDMANN 2003, Thm. 4.7]).

Sei  $(\mathcal{H}_B, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$  ein  $\mathcal{B}$ -Rechtsmodul und  $({}_B\mathcal{E}_A, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$  ein  $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ -Bimodul, und beide inneren Produkte seien vollständig positiv nach Definition 1.1.22, dann ist das innere Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A^{\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}}$  auf  ${}_B\mathcal{H} \widehat{\otimes}_B {}_B\mathcal{E}_A$  auch vollständig positiv.

Mittels  $\widehat{\otimes}$  haben wir somit für feste  $*$ -Algebren  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  einen Funktor zwischen den Kategorien der Moduln

$$\widehat{\otimes}_B : {}^*\text{-mod}_B(\mathcal{C}) \times {}^*\text{-mod}_A(\mathcal{B}) \rightarrow {}^*\text{-mod}_A(\mathcal{C}). \quad (1.1.28)$$

gefunden. Im Fall von  $\ast$ -Algebren mit Einselement sind die Kategorien  $\ast\text{-mod}(\cdot)$  durch  $\ast\text{-Mod}(\cdot)$  zu ersetzen. Wegen Satz 1.1.45 ist  $\widehat{\otimes}$  auch für die Kategorien der  $\ast$ -Darstellungen ein Funktor in dem Sinne, daß

$$\widehat{\otimes}_{\mathcal{B}} : \ast\text{-rep}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \times \ast\text{-rep}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \rightarrow \ast\text{-rep}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}). \quad (1.1.29)$$

Auch hier sind die Kategorien  $\ast\text{-rep}(\cdot)$  durch  $\ast\text{-Rep}(\cdot)$  zu ersetzen, falls die  $\ast$ -Algebren dies zulassen, sprich ein Einselement besitzen. Die beiden wichtigen Beispiele für das innere Tensorprodukt sind die RIEFFEL-Induktion und der Wechsel der Basisalgebra, die wir uns im folgenden ansehen wollen.

**Definition 1.1.46** (Natürliche Transformation, [KASSEL 1995]).

Seien  $F, G : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  zwei Funktoren. Eine natürlichen Transformation  $I$  ist eine Familie von Morphismen von  $F$  nach  $G$  (man schreibt  $I : F \rightarrow G$ ), indiziert durch die Elemente der Kategorie  $\mathbf{A}$ , so daß für jeden Morphismus  $\text{Morph}(\mathbf{A}) \ni f : A \rightarrow A'$  mit  $A, A' \in \text{Obj}(\mathbf{A})$  das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{I(A)} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(A') & \xrightarrow{I(A')} & G(A'). \end{array} \quad (1.1.30)$$

Ist weiter  $I(A)$  ein Isomorphismus von  $\mathbf{B}$ , so nennt man  $I : F \rightarrow G$  einen natürlichen Isomorphismus.

**Beispiele 1.1.47** (RIEFFEL-Induktion, Wechsel der Basisalgebra).

Seien  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}'$   $\ast$ -Algebren über einem Ring  $\mathcal{C}$ . Desweiteren sei  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \in \ast\text{-rep}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$  und  ${}_{\mathcal{D}}\mathcal{G}_{\mathcal{D}'} \in \ast\text{-rep}_{\mathcal{D}'}(\mathcal{D})$ .

i.) Wir bezeichnen den Funktor

$$R_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \cdot : \ast\text{-rep}_{\mathcal{D}}(\mathcal{A}) \rightarrow \ast\text{-rep}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) \quad (1.1.31)$$

als RIEFFEL-Induktion. Dies bedeutet, auf einem Objekt der Kategorie gilt

$$R_{\mathcal{E}}(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}) = {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}_{\mathcal{D}}.$$

Angewendet auf einen Morphismus ergibt sich

$$R_{\mathcal{E}}(T) = \text{id} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} T,$$

für  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ .

ii.) Analog dazu kann man die Basisalgebra wechseln und den folgenden Funktor

$$S_{\mathcal{G}} = \cdot \widehat{\otimes}_{\mathcal{D}} {}_{\mathcal{D}}\mathcal{G}_{\mathcal{D}'} : \ast\text{-rep}_{\mathcal{D}}(\mathcal{A}) \rightarrow \ast\text{-rep}_{\mathcal{D}'}(\mathcal{A}) \quad (1.1.32)$$

angeben. Angewendet auf ein Objekt bedeutet dies  $S_{\mathcal{G}}({}_{\mathcal{A}}\mathcal{E}_{\mathcal{D}}) = {}_{\mathcal{A}}\mathcal{E}_{\mathcal{D}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{D}} {}_{\mathcal{D}}\mathcal{G}_{\mathcal{D}'}$  und auf einen Morphismus  $S_{\mathcal{G}}(T) = T \widehat{\otimes}_{\mathcal{D}} \text{id}$ .

Aufgrund von Lemma 1.1.43 kommutieren die beiden Funktoren  $R_\varepsilon$  und  $S_\varepsilon$  bis auf eine natürliche Transformation, so daß  $R_\varepsilon \circ S_\varepsilon \cong S_\varepsilon \circ R_\varepsilon$ , was gleichbedeutend mit der Kommutativität des folgenden Diagramms ist:

$$\begin{array}{ccc}
 {}^*\text{-rep}_{\mathcal{D}}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{S_\varepsilon} & {}^*\text{-rep}_{\mathcal{D}'}(\mathcal{A}) \\
 \downarrow R_\varepsilon & & \downarrow R_\varepsilon \\
 {}^*\text{-rep}_{\mathcal{D}}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{S_\varepsilon} & {}^*\text{-rep}_{\mathcal{D}'}(\mathcal{B}).
 \end{array}$$

**Bemerkung 1.1.48** (RIEFFEL-Induktion Notation).

Manchmal ist es zweckmäßig, die Notation der RIEFFEL-Induktion nicht zu formal zu schreiben. Gegeben eine Darstellung  $(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}, \pi)$ , so bezeichnen wir auch kurz  $\pi$  als Darstellung. Dementsprechend verstehen wir unter  $R_\varepsilon(\pi)$  die Darstellung, die wir durch Anwenden der RIEFFEL-Induktion gemäß Beispiel 1.1.47 auf  $(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}, \pi)$  erhalten. Ein Anwenden von  $R_\varepsilon$  auf  $\pi$  als *Homomorphismus* ist folglich nicht definiert.

## 1.2 MORITA-Äquivalenz

In diesem Kapitel werden wir einen kurzen Überblick zu den Ideen der MORITA-Theorie geben. Für einen ausgiebigen Überblick verweisen wir auf [MORITA 1958; BASS 1968; JACOBSON 1989; LAM 1999] für die *ringtheoretischen* MORITA-Äquivalenz auf [ARA 1999, 2000], der die *\*-MORITA-Äquivalenz* behandelt, sowie [BURSZTYN & WALDMANN 2001b, a, 2003] für die *starke* MORITA-Äquivalenz. Desweiteren spielen die Arbeiten [RIEFFEL 1972, 1974a, b] eine wichtige Rolle, in denen die Grundlagen für die *\*- und starke MORITA-Äquivalenz* für  $C^*$ -Algebren gelegt wurden.

Motiviert ist die MORITA-Äquivalenz durch die Darstellungstheorie von Ringen bzw. Algebren: MORITA-äquivalente Ringe bzw. Algebren haben eine äquivalente Darstellungstheorien. Wie wir sehen werden, sind noch weitere Eigenschaften von Ringen bzw. Algebren unter MORITA-Äquivalenz erhalten, siehe Satz 1.2.5 und Kapitel ??.

Ausgangspunkt bilden die Kategorie der Moduln für Ringe bzw. die Kategorie der Algebren, deren Äquivalenz als Kategorien zu MORITA-Äquivalenz der jeweiligen Ringe oder Algebren führt. Der Unterschied bei den verschiedenen Äquivalenzbegriffen besteht darin, daß der Ring bzw. die Algebra (sowie der Funktor, der die Äquivalenz generieren wird) zusätzliche Strukturen tragen können. Dies werden wir in den nächsten Kapiteln genauer erläutern.

### 1.2.1 Ringtheoretische MORITA-Äquivalenz

Die grundlegende Idee der ringtheoretischen MORITA-Theorie ist eine Klassifikation von Ringen mittels Ihrer Darstellungstheorie als Endomorphismen von ABELSchen Gruppen. Dabei betrachten wir in diesem Kapitel Ringe im Sinne von Definition A.1.2, die nicht notwendigerweise geordnet sein müssen.

**Definition 1.2.1** (Äquivalenz und Isomorphie von Kategorien).

Man nennt zwei Kategorien  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  äquivalent, falls es zwei kovariante Funktoren  $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$

und  $G : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$  gibt, so daß das Hintereinanderausführen bis auf eine natürliche Transformation die jeweiligen Identitäten auf den Kategorien liefern

$$F \circ G \cong \text{Id}_{\mathbf{B}} \quad \text{und} \quad G \circ F \cong \text{Id}_{\mathbf{A}}. \quad (1.2.1)$$

Ferner nennt man die beiden Kategorien isomorph wenn das Hintereinanderausführen der beiden Funktoren die Identität auf den Kategorien ist

$$F \circ G = \text{Id}_{\mathbf{B}} \quad \text{und} \quad G \circ F = \text{Id}_{\mathbf{A}}. \quad (1.2.2)$$

Dabei bezeichnet  $\text{Id}$  den Identitätsfunktork auf der jeweiligen Kategorie.

**Definition 1.2.2** (MORITA-Äquivalenz von Ringen).

Man nennt zwei Ringe  $R$  und  $S$  MORITA-äquivalent, falls die Kategorien  $R\text{-Mod}$  und  $S\text{-Mod}$  äquivalent im Sinne von Definition 1.2.1 sind.

Die Frage nach der MORITA-Äquivalenz zweier Ringe manifestiert sich damit in der Suche nach zwei geeigneten Funktoren. Bei zwei gegebenen Ringen ist es im allgemeinen sehr schwierig, diese Funktoren zu finden. Wir wollen im weiteren ein Beispiel für MORITA-äquivalente Ringe angeben. Später werden wir sehen, daß die RIEFFEL-Induktion genau die Funktoren liefert um MORITA-Äquivalenz elegant zu formulieren.

**Beispiel 1.2.3** ([LAM 1999, Thm. 17.20]).

Ein einfaches und wichtiges Beispiel ist ein Ring  $R$  und der Ring  $M_n(R)$ , den  $n \times n$ -Matrizen über dem Ring  $R$ . Sei  $V$  ein  $R$ -Linksmodul, dann definieren wir den  $M_n(R)$ -Linksmodul durch  $M_n(R)F(V) = V^n$ , wobei die Linkswirkung mittels Matrixmultiplikation auf Vektoren gegeben ist. Für den Ring  $R$  ist  $V^n$ , durch komponentenweise Multiplikation, ein Rechtsmodul. Die andere Richtung verläuft analog, und somit ist über den Funktor  $F : R\text{-Mod} \rightarrow M_n(R)\text{-Mod}$  eine Äquivalenz von Kategorien gegeben und  $R$  und  $M_n(R)$  sind MORITA-äquivalent.

**Lemma 1.2.4** (MORITA-Äquivalenz von kommutativen Ringen).

Zwei kommutative Ringe sind genau dann MORITA-äquivalent, wenn sie isomorph sind.

*Beweis.* Der Beweis findet sich in [LAM 1999, Cor. 18.42]. □

Nun stellt sich eine wichtige Frage: Welche tiefere Bedeutung hat MORITA-Äquivalenz? Ein erster Schritt ist nun nach MORITA-Invarianten zu suchen, d. h. welche Eigenschaften der Ringe sind unter MORITA-Äquivalenz erhalten und welche nicht. Das erste von uns behandelte Beispiel 1.2.3 zeigt bereits, daß weder *Dimension*<sup>1</sup> noch *Kommutativität* MORITA-Invarianten sein können.

**Satz 1.2.5** (MORITA-Invarianten).

Die beiden Ringe  $R$  und  $S$  seien im Sinne von Definition 1.2.2 MORITA-äquivalent. Der Ring  $R$  ist nur genau dann einfach, halbeinfach, NOETHERsch, ARTINSch oder primitiv, wenn der Ring  $S$  einfach, halbeinfach, NOETHERsch, ARTINSch oder primitiv ist. Desweiteren haben die beiden Ringe  $R$  und  $S$  \*-isomorphe Zentren  $\mathfrak{Z}(R)$  und  $\mathfrak{Z}(S)$  sowie isomorphe JACOBSON-Radikale  $J(R)$  und  $J(S)$ .

<sup>1</sup>In dem angegebenen Beispiel 1.2.3 kann man von einer Dimension im Sinn einer Vektorraumdimension sprechen.

*Beweis.* Für die Beweise verweisen wir auf [LAM 1999; JACOBSON 1989].  $\square$

In Kapitel ?? werden wir uns im Rahmen der (unter einer HOPF- $*$ -Algebra  $H$  äquivalenten)  $*$ - und starken MORITA-Äquivalenz mit MORITA-Invarianten auseinandersetzen. Es stellt sich heraus, daß MORITA-äquivalente  $*$ -Algebren *isomorphe  $K$ -Theorie, isomorphe Verbände von Idealen und isomorphe Zentren* haben. Wie bereits erwähnt haben MORITA-äquivalente  $*$ -Algebren auch *isomorphe Darstellungstheorien*, was insbesondere in der Physik eine wichtige Anwendung findet.

### 1.2.2 MORITA-Äquivalenz und RIEFFEL-Induktion

Wir wollen nun das Konzept der MORITA-Äquivalenz ein wenig brauchbarer formulieren. Dazu wollen wir ein „Rezept“ angeben, Funktoren zu konstruieren, die notwendig sind um über MORITA-Äquivalenz zu entscheiden. Dies geht auf einen Satz von EILENBERG [1960] und WATTS [1960] zurück und wurde von RIEFFEL [1972, 1974a, b] später auf  $C^*$ - und  $W^*$ -Algebren angewendet. In [LANDSMAN 1998] findet man eine moderne und ausführliche Darstellung dessen. Die Idee besteht darin, den in Beispiel 1.2.3 angegebenen Funktor  $F : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{S}\text{-Mod}$  auf eine kanonische Weise angeben zu können, wenn er denn existiert. Dazu benötigen wir Bimoduln, die wir bereits in Definition 1.1.32 eingeführt haben.

Mit Hilfe der Bimoduln sind wir in der Lage den Satz von EILENBERG [1960] und WATTS [1960] für Ringe zu formulieren.

**Satz 1.2.6** (Satz von EILENBERG-WATTS, [EILENBERG 1960; CARTAN & EILENBERG 1999]).

Seien  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{S}$  Ringe und  $\mathbf{R}\text{-Mod}$  bzw.  $\mathbf{S}\text{-Mod}$  die Kategorien der  $\mathbf{R}$ -Linksmoduln bzw. der  $\mathbf{S}$ -Linksmoduln.  $F : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{S}\text{-Mod}$  sei ein kovarianter, additiver<sup>2</sup> Funktor.  $F(\mathbf{R})$  wird zu einem  $\mathbf{S}$ -Linksmodul und einem  $\mathbf{R}$ -Rechtsmodul, so daß  ${}_S F(\mathbf{R})_{\mathbf{R}}$  ein  $(\mathbf{S}, \mathbf{R})$ -Bimodul wird, und

$${}_S F(\mathbf{R})_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{R}} \cdot : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{S}\text{-Mod} \quad (1.2.3)$$

ist ein additiver, kovarianter Funktor.

**Lemma 1.2.7** ([EILENBERG 1960]).

Sei  $F : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{S}\text{-Mod}$  ein additiver, kovarianter Funktor und  ${}_R \mathcal{E}$  ein  $\mathbf{R}$ -Linksmodul.

- i.) Die Gruppe  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}({}_R \mathcal{E}, F(\mathbf{R}))$  ist für jeden  $\mathbf{R}$ -Linksmodul  ${}_R \mathcal{E}$  ein wohldefinierter  $\mathbf{S}$ -Linksmodul.
- ii.)  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(\cdot, F(\mathbf{R})) : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{S}\text{-Mod}$  ist ein additiver, kontravarianter Funktor.

*Beweis.* Der Beweis findet sich in [EILENBERG 1960; CARTAN & EILENBERG 1999].  $\square$

Satz 1.2.6 ist auf ringtheoretischen Niveau die RIEFFEL-Induktion, die wir bereits in Beispiel 1.1.47 kennengelernt haben, allerdings mit der einer zusätzlichen additiven Struktur, die durch die Ringe gegeben ist.

Wir wollen nun angeben, was wir unter einem *dualen Bimodul* zu einem gegebenen  $(\mathbf{R}, \mathbf{S})$ -Bimodul  ${}_R \mathcal{E}_{\mathbf{S}}$  verstehen. Dieser wird eine wichtige Rolle spielen, wenn wir mit Hilfe der Bimoduln MORITA-Äquivalenz charakterisieren wollen, bzw. wenn wir später das PICARD-Gruppoid von Algebren betrachten. Wir können auf natürliche Weise mittels Lemma 1.2.7 den dualen  $(\mathbf{S}, \mathbf{R})$ -Bimodul  ${}_S \mathcal{E}^*_{\mathbf{R}}$  konstruieren.

<sup>2</sup> *Additiv* bedeutet in diesem Zusammenhang, daß der Funktor die durch die Ringstruktur gegebene additive Struktur der Morphismen respektiert.

**Korollar 1.2.8** (Dualer Bimodul – Ringe).

Seien  $R$  und  $S$  zwei Ringe und  ${}_R\mathcal{E}_S$  sei ein  $(R, S)$ -Bimodul. Dann existiert ein dazu dualer  $(S, R)$ -Bimodul  ${}_S\mathcal{E}_R^*$  mittels

$${}_S\mathcal{E}_R^* := \text{Hom}_R({}_R\mathcal{E}_S, R). \quad (1.2.4)$$

Der duale Bimodul besteht somit aus den  $R$ -linearen Homomorphismen vom ursprünglichen Bimodul in den Ring  $R$ .

*Beweis.* Der Bimodul  ${}_S\mathcal{E}_R^*$  ist auf natürliche Weise ein  $S$ -Linksmodul (vgl. Lemma 1.2.7) und ein  $R$ -Rechtsmodul. Die Modulstrukturen sind durch folgende Konstruktion gegeben: sei  $\phi \in {}_S\mathcal{E}_R^*$ ,  $s \in S$ ,  $r \in R$  und  $x \in {}_R\mathcal{E}_S$ , so ist  $(\phi \cdot r)(x) = \phi(r \cdot x)$  und  $(s \cdot \phi)(x) = \phi(x \cdot s)$ . Die weiteren Modulstrukturen rechnet man leicht nach.  $\square$

Nun können wir Definition 1.2.2 so deuten, daß zwei Ringe  $R$  und  $S$  genau dann MORITA-äquivalent sind, wenn es gelingt einen „geeigneten“  $(R, S)$ -Bimodul zu finden. In Korollar 1.2.9 werden wir angeben, wann ein Bimodul geeignet ist.

**Korollar 1.2.9** (Bimodul und MORITA-Äquivalenz).

Zwei Ringe  $R$  und  $S$  sind dann und nur dann MORITA-äquivalent, wenn es zwei (zueinander duale) Bimoduln  ${}_R\mathcal{E}_S$  und  ${}_S\mathcal{E}_R^*$  gibt, so daß

$${}_R\mathcal{E}_S \otimes_S {}_S\mathcal{E}_R^* \cong {}_R R_R \quad \text{und} \quad {}_S\mathcal{E}_R^* \otimes_R {}_R\mathcal{E}_S \cong {}_S S_S. \quad (1.2.5)$$

**Definition 1.2.10** (Äquivalenzbimodul).

Man nennt einen Bimodul für zwei Ringe  $R$  und  $S$  einen Äquivalenzbimodul oder einen MORITA-Äquivalenzbimodul, falls dieser Korollar 1.2.9 gerecht wird.

Wir wollen nun den Satz von MORITA formulieren, dazu benötigen wir zuvor folgende Definitionen.

**Definition 1.2.11** (Generator und Progenerator).

Man nennt einen  $R$ -Rechtsmodul  $\mathcal{E}_R$  einen

- i.) Generator, falls jeder andere  $R$ -Rechtsmodul als einen Quotienten einer direkten Summe von Kopien des  $R$ -Moduls erhält.
- ii.) Progenerator, falls er endlich erzeugt ist, projektiv und ein Generator ist.

**Satz 1.2.12** (Satz von MORITA).

Zwei Ringe mit Einselementen  $R$  und  $S$  sind genau dann MORITA-äquivalent, wenn es einen Progenerator  $R$ -Rechtsmodul  $\mathcal{E}_R$  gibt, so daß  $S \cong \text{End}_R(\mathcal{E}_R)$ . Ist desweiteren  ${}_S\mathcal{E}_R$  ein Äquivalenzbimodul, dann ist der duale Bimodul durch  ${}_R\mathcal{E}_S^* := \text{Hom}_R({}_S\mathcal{E}_R, R)$  gegeben.

**Definition 1.2.13** (Volle idempotente Elemente).

Ein idempotentes Element  $P \in M_n(R)$  nennt man voll, wenn die lineare Hülle der Elemente der Form  $TPS$ , mit  $T, S \in M_n(R)$ , ganz  $M_n(R)$  ist.

**Bemerkungen 1.2.14.**

- i.) Für volle Elemente  $P$  schreiben wir die Definition 1.2.13 auch als:  $M_n(R)PM_n(R) = M_n(R)$ .

- ii.) Sei  $P$  idempotent. Ein endlich erzeugter projektiver  $R$ -Modul  $PR^n$  ist genau dann ein Generator, wenn  $P$  voll ist [LAM 1999, 18.10(D)].

Nun sind wir in der Lage eine alternative Formulierung von MORITA-Äquivalenz anzugeben.

**Satz 1.2.15** (Alternative Formulierung der MORITA-Äquivalenz).

Zwei Ringe  $R$  und  $S$  sind genau dann MORITA-äquivalent, wenn es ein  $n \in \mathbb{N}$ , sowie ein volles, idempotentes  $P \in M_n(R)$  gibt, so daß  $S \cong PM_n(R)P$ .

Bevor wir uns nun endgültig der  $*$ - bzw. starken MORITA-Äquivalenz zuwenden, wollen wir das Beispiel 1.2.3 nochmal aufgreifen und in der oben erarbeiteten Sprache formulieren.

**Beispiel 1.2.16** (Äquivalenzbimodul zu den Ringen  $M_n(R)$  und  $R$ ).

Sei  $R$  ein Ring und  $M_n(R)$  der Ring der  $n \times n$ -Matrizen über  $R$ , dann entspricht der in Beispiel 1.2.3 angegebene Funktor dem Bimodul  ${}_{M_n(R)}R^n_R$ . Dabei kann man Elemente in  $R^n$  als Spaltenvektoren auffassen, die Linksmodulstruktur ist durch die gewöhnliche Multiplikation der Matrizen mit Vektoren gegeben, die Rechtsmodulstruktur ist die komponentenweise Multiplikation mit Elementen aus  $R$ .

### 1.2.3 $*$ - und starke MORITA-Äquivalenz

Ein nächster Schritt ist MORITA-Äquivalenz für  $*$ -Algebren zu formulieren. Diese zeichnen sich dadurch aus, daß sie aufgrund der  $*$ -Involution mit mehr Struktur versehen sind. Dadurch sind wir beispielsweise in der Lage über Positivität zu sprechen. Im weiteren seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zwei  $*$ -Algebren. Der Bimodul  ${}_B\mathcal{E}_A$  ist mit zwei inneren Produkten  ${}_B\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$  versehen, von denen fordern wir noch nicht, daß  $({}_B\mathcal{E}_A, {}_B\langle \cdot, \cdot \rangle)$  und  $(\mathcal{E}_A, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$  für sich Prä-HILBERT-Moduln nach Definition 1.1.22 sind, allerdings wird dies bei der später behandelten starken MORITA-Theorie der Fall sein. Für die MORITA-Theorie ist der duale Bimodul wichtig. Aufgrund der  $*$ -Struktur können wir den dualen Bimodul zu  $({}_B\mathcal{E}_A, {}_B\langle \cdot, \cdot \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$  auf eine kanonische Weise definieren.

**Definition 1.2.17** (Komplex-konjugierter Bimodul für  $*$ -Algebren).

Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zwei  $*$ -Algebren über einem Ring  $\mathbb{C}$ , und  $({}_B\mathcal{E}_A, {}_B\langle \cdot, \cdot \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$  sei ein Bimodul. Man definiert den dazu komplex-konjugierten Bimodul  $({}_A\bar{\mathcal{E}}_B, {}_A\bar{\langle \cdot, \cdot \rangle}_B, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$  über die Modulstrukturen

$$a \cdot \bar{x} := \overline{x \cdot a^*}, \quad \bar{x} \cdot b := \overline{b^* \cdot x}, \quad (1.2.6)$$

$${}_A\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^{\bar{\cdot}} := \langle x, y \rangle_A^{\varepsilon}, \quad \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle_B^{\bar{\cdot}} := {}_B\langle x, y \rangle^{\varepsilon}. \quad (1.2.7)$$

Dabei bezeichnet man Elemente im komplex-konjugierten Bimodul durch die Konjunktion  $\bar{\cdot}$ . Als Menge sind der komplex-konjugierte Bimodul und der ursprüngliche Bimodul identisch.

**Lemma 1.2.18** (Strukturen auf dualen Bimodul).

Der duale Bimodul in Definition 1.2.17 ist wohldefiniert, und er erbt die Strukturen des ursprünglichen Bimoduls.

*Beweis.* Wir müssen zeigen, daß die Bimodulstrukturen auf dem dualen Bimodul sinnvoll definiert sind.



i.) Zuerst zeigen wir die (Links-) Modulstruktur.

$$(a'a)\bar{x} = \overline{x(a'a)^*} = \overline{x(a^*a'^*)} = \overline{(xa^*)a'^*} = a'(\overline{xa^*}) = a'(a\bar{x})$$

Analog zeigt man die Konsistenz der Rechtsmodulstruktur, bzw. der Bimodulstruktur.

ii.) Desweiteren gilt es zu zeigen, daß die Strukturen der inneren Produkte sich auf den dualen Bimodul übertragen. Aus  $\langle x, y \cdot a \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} a$  sowie  $(\langle x, y \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon})^* = \langle y, x \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon}$  und der Definition 1.2.17 folgt

$${}_{\mathcal{A}}\langle a \cdot \bar{x}, \bar{y} \rangle^{\varepsilon} = {}_{\mathcal{A}}\langle \overline{x \cdot a^*}, \bar{y} \rangle^{\varepsilon} = \langle x \cdot a^*, y \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} = (a^*)^* \langle x, y \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} = a_{\mathcal{A}} \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^{\varepsilon}.$$

iii.) Ist im Bimodul  $({}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, {}_{\mathcal{B}}\langle \cdot, \cdot \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  das  $\mathcal{A}$ -wertige innere Produkt kompatibel mit der  $\mathcal{B}$ -Linksaktion (siehe Definition 1.1.35), so ist dies auch im dualen Bimodul  $({}_{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}, {}_{\mathcal{A}}\langle \cdot, \cdot \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}})$  der Fall

$${}_{\mathcal{A}}\langle \bar{x} \cdot b, \bar{y} \rangle^{\varepsilon} = {}_{\mathcal{A}}\langle \overline{b^* \cdot x}, \bar{y} \rangle^{\varepsilon} = \langle b^* \cdot x, y \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} = \langle x, b \cdot y \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} = {}_{\mathcal{A}}\langle \bar{x}, \overline{b \cdot y} \rangle^{\varepsilon} = {}_{\mathcal{A}}\langle \bar{x}, \bar{y} \cdot b^* \rangle^{\varepsilon}.$$

Analoges gilt für das  $\mathcal{B}$ -wertige innere Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}^{\varepsilon}$ .

iv.) Zu guter Letzt ist zu zeigen, daß die Kompatibilität der beiden inneren Produkte  ${}_{\mathcal{B}}\langle \cdot, \cdot \rangle^{\varepsilon}$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon}$  auch eine Kompatibilität der beiden inneren Produkte auf dem dualen Bimodul mit sich bringt

$$\begin{aligned} \bar{x} \cdot \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle_{\mathcal{B}}^{\varepsilon} &= \bar{x} \cdot {}_{\mathcal{B}}\langle y, z \rangle^{\varepsilon} = \bar{x} \cdot ({}_{\mathcal{B}}\langle z, y \rangle^{\varepsilon})^* = \overline{{}_{\mathcal{B}}\langle z, y \rangle^{\varepsilon} \cdot x} \\ &= \overline{z \cdot \langle y, x \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon}} = (\langle y, x \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon})^* \cdot \bar{z} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} \cdot \bar{z} = {}_{\mathcal{A}}\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^{\varepsilon} \cdot \bar{z}. \end{aligned}$$

Die Beweise zu ii.) und iii.) für das  $\mathcal{B}$ -wertige innere Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}^{\varepsilon}$  geschehen komplett analog zu den aufgezeigten Rechnungen.

Es ist aufgrund der Definition der inneren Produkte auf dem dualen Bimodul offensichtlich, daß bei (nicht-)ausgearteten bzw. vollständig positiven Bimoduln  $({}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, {}_{\mathcal{B}}\langle \cdot, \cdot \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  auch der duale Bimodul (nicht-)ausgeartet bzw. vollständig positiv ist.  $\square$

Nun können wir angeben, was \*-MORITA-Äquivalenz bzw. *starke MORITA-Äquivalenz* ist [RIEFFEL 1972, 1974a, b; ARA 1999, 2000; BURSZTYN & WALDMANN 2001b, a].

**Definition 1.2.19** (\*- und starker Äquivalenzbimodul).

Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  \*-Algebren über einem Ring  $\mathbb{C}$  und  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  ein  $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ -Bimodul mit einem  $\mathcal{A}$ -wertigen inneren Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon}$  und einem  $\mathcal{B}$ -wertigen inneren Produkt  ${}_{\mathcal{B}}\langle \cdot, \cdot \rangle^{\varepsilon}$ . Wir nennen  $({}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, {}_{\mathcal{B}}\langle \cdot, \cdot \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  einen \*-MORITA-Äquivalenzbimodul oder kurz \*-Äquivalenzbimodul, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

i.) Die beiden inneren Produkte  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon}$  bzw.  ${}_{\mathcal{B}}\langle \cdot, \cdot \rangle^{\varepsilon}$  sind nichtausgeartet, voll und mit der  $\mathcal{B}$ -Wirkung bzw.  $\mathcal{A}$ -Wirkung kompatibel.

ii.) Für alle  $x, y, z \in {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  sind die beiden inneren Produkte miteinander kompatibel, d. h. es gilt:

$$x \cdot \langle y, z \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} = {}_{\mathcal{B}}\langle x, y \rangle^{\varepsilon} \cdot z.$$

iii.)  $\mathcal{B} \cdot {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  und  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{A} = {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ .

Sind zusätzlich beide inneren Produkte vollständig positiv, das heißt  $({}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{B}}, {}_{\mathcal{B}}\langle \cdot, \cdot \rangle)$  und  $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  sind Prä-HILBERT-Moduln, so nennt man  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  einen starken MORITA-Äquivalenzbimodul oder kurz starken Äquivalenzbimodul.

**Bemerkungen 1.2.20** (Komplex-konjugierter Bimodul).

- i.) Im Fall von Äquivalenzbimoduln für  $*$ -Algebren, sind die Definitionen von dualen und komplex-konjugiertem Bimodul miteinander identifizierbar, und es gilt aufgrund der Struktur des komplex-konjugierten Bimoduls in Definition 1.2.17  ${}_B\bar{\mathcal{E}}_A = {}_B\mathcal{E}_A$ .
- ii.) Sei  $T : {}_B\mathcal{E}_A \ni x \mapsto T(x) \in {}_B\mathcal{F}_A$  ein Verschränkungsoperator, so definiert  $\bar{T}(\bar{x}) := \overline{T(x)}$  einen Verschränkungsoperator auf den dualen Bimoduln und  $\bar{T} : {}_A\bar{\mathcal{E}}_B \rightarrow {}_A\bar{\mathcal{F}}_B$ .

**Definition 1.2.21** ( $*$ - und starke MORITA-Äquivalenz).

Man nennt zwei  $*$ -Algebren  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$   $*$ -MORITA-äquivalent (bzw. stark MORITA-äquivalent), falls es einen  $*$ -Äquivalenzbimodul (bzw. einen starken Äquivalenzbimodul) gibt.

**Definition 1.2.22** (Idempotenz und Nichtausgeartetheit von  $*$ -Algebren).

Man nennt eine  $*$ -Algebra  $\mathcal{A}$

- i.) nichtausgeartet, wenn für alle  $b \in \mathcal{A}$  aus  $ab = 0$  oder aus  $ba = 0$  folgt, daß  $a = 0$ .
- ii.) idempotent, wenn Elemente der Form  $ab$  die Algebra  $\mathcal{A}$  aufspannen.

Offensichtlich sind Algebren mit einem Einselement  $1_A \in \mathcal{A}$  immer idempotent.

**Lemma 1.2.23** (Der Äquivalenzbimodul  ${}_A\mathcal{A}_A$ ).

Der Bimodul  ${}_A\mathcal{A}_A$  ist genau dann ein  $*$ - oder starker Äquivalenzbimodul, wenn die  $*$ -Algebra idempotent und nichtausgeartet ist.

*Beweis.* Der Beweis findet sich in [BURSZTYN & WALDMANN 2003]. □

**Lemma 1.2.24** ( $*$ - und starke MORITA-Äquivalenz ist Äquivalenzrelation).

$*$ - und starke MORITA-Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.

*Beweis.* Wir müssen Reflexivität, Symmetrie und Transitivität zeigen.

Die Reflexivität geschieht mittels des Bimoduls  ${}_A\mathcal{A}_A$  mit den beiden kanonischen inneren Produkten

$${}_A\langle a, b \rangle = ab^* \quad \langle a, b \rangle_A = a^*b. \quad (1.2.8)$$

Für die Symmetrie benötigen wir den dualen Bimodul  ${}_A\bar{\mathcal{E}}_B$ , den wir in Definition 1.2.17 eingeführt haben. Die Transitivität zeigen wir durch  $\widehat{\otimes}$ , bzw. durch die RIEFFEL-Induktion.

Ausführlicher findet man den Beweis in [ARA 1999; BURSZTYN & WALDMANN 2003]. □

**Korollar 1.2.25.**

Der Bimodul  ${}_B\mathcal{E}_A$  ist genau dann ein  $*$ - bzw. starker MORITA-Äquivalenzbimodul, falls

$${}_B\mathcal{E}_A \widetilde{\otimes}_A {}_A\bar{\mathcal{E}}_B \cong {}_B\mathcal{B}_B \quad \text{und} \quad {}_A\bar{\mathcal{E}}_B \widetilde{\otimes}_B {}_B\mathcal{E}_A \cong {}_A\mathcal{A}_A. \quad (1.2.9)$$

*Beweis.* Das Korollar ist eine direkte Konsequenz aus Satz 1.2.24 [BURSZTYN & WALDMANN 2001b, Prop. 7.2]. Die kanonischen Isomorphismen sind gegeben durch die Abbildungen

$$x \otimes \bar{y} \mapsto {}_B\langle x, y \rangle \quad \text{und} \quad \bar{x} \otimes y \mapsto \langle x, y \rangle_A.$$

□

### 1.3 Die $H$ -äquivalente MORITA-Theorie

Ein wichtiger Teil dieser Arbeit ist nun die Formulierung einer unter einer HOPF- $*$ -Wirkung äquivalenten MORITA-Theorie. Dazu benötigen wir die Theorie der HOPF-Algebren, die wir in aller Ausführlichkeit in Anhang A.2 zusammengetragen haben.

Die Forderung einer  $*$ -Involution ist unumgänglich, da wir insbesondere an  $*$ - und starker MORITA-Äquivalenz interessiert sind. Mit einer  $*$ -Wirkung bezeichnen wir eine Wirkung der HOPF- $*$ -Algebra  $H$ , die zusätzlich

$$(h \triangleright a)^* = S(h)^* \triangleright a^*$$

für  $h \in H$  und  $a \in \mathcal{A}$  erfüllt. Die genauen Definitionen zu Wirkungen von HOPF-Algebren befinden sich in Anhang A.2.3. Das Kapitel orientiert sich an [JANSEN & WALDMANN 2006]. Im weiteren sei  $H$  eine HOPF- $*$ -Algebra, soweit nichts anderes explizit gesagt wird.

#### 1.3.1 $H$ -äquivalente Bimoduln und Darstellungstheorie

In diesem Kapitel wollen wir die  $*$ -Darstellungstheorie für  $*$ -Algebren  $H$ -äquivalent formulieren. Dies bedeutet, daß wir eine vorgegebene *Symmetrie* in Form einer HOPF- $*$ -Algebra Wirkung implementieren.

**Definition 1.3.1** ( $H$ -äquivanter Bimodul).

Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zwei  $*$ -Algebren und  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  ein Bimodul mit zwei verträglichen inneren Produkten. Ferner sei  $(H, \triangleright)$  eine HOPF- $*$ -Algebra, so daß  $(H, \mathcal{A}, \triangleright)$  und  $(H, \mathcal{B}, \triangleright)$   $H$ -Linksmodulalgebren nach Definition A.2.28 sind. Wir nennen eine Wirkung  $(H, \triangleright)$  auf dem Bimodul  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  kompatibel mit dem Bimodul, wenn folgende Bedingungen für alle  $x, y \in {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ ,  $a \in \mathcal{A}$  und  $b \in \mathcal{B}$  erfüllt sind:

i.) Die HOPF-Wirkung ist mit den Bimodulstrukturen verträglich, d. h. es gilt

$$h \triangleright (b \cdot x \cdot a) = (h_{(1)} \triangleright b) \cdot (h_{(2)} \triangleright x) \cdot (h_{(3)} \triangleright a). \quad (1.3.1)$$

ii.) Die HOPF-Wirkung ist mit den inneren Produkten verträglich

$$h \triangleright \langle x, y \rangle_{\mathcal{A}} = \langle S(h_{(1)})^* \triangleright x, h_{(2)} \triangleright y \rangle_{\mathcal{A}} \quad \text{und} \quad h \triangleright_{\mathcal{B}} \langle x, y \rangle = {}_{\mathcal{B}} \langle h_{(1)} \triangleright x, S(h_{(2)})^* \triangleright y \rangle. \quad (1.3.2)$$

**Bemerkung 1.3.2.**

Da es sich bei  $(H, \mathcal{A}, \triangleright)$  und  $(H, \mathcal{B}, \triangleright)$  um  $H$ -Modulalgebren handelt, sind die Forderungen  $h \triangleright (bb' \cdot x) = (h_{(1)} \triangleright b)(h_{(2)} \triangleright b') \cdot (h_{(3)} \triangleright x)$  und analog  $h \triangleright (x \cdot aa') = (h_{(1)} \triangleright x) \cdot (h_{(2)} \triangleright a)(h_{(3)} \triangleright a')$  automatisch erfüllt wenn i.) gegeben ist.

**Lemma 1.3.3.**

Definition 1.3.1 ist konsistent definiert und mit allen Bimodul-Strukturen verträglich.

*Beweis.* Dazu müssen wir zeigen, daß die in Gleichung (1.3.2) gemachten Kompatibilitätsbedingungen mit den Bimodulstrukturen verträglich sind.

i.) Die  $H$ -Wirkung auf das  $\mathcal{A}$ -wertige innere Produkt auf  $({}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, {}_{\mathcal{B}}\langle \cdot, \cdot \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  ist mit der  $\mathcal{A}$ -Rechtslinearität im zweiten Argument kompatibel.

$$h \triangleright \langle x, y \cdot a \rangle_{\mathcal{A}} = \langle S(h_{(1)})^* \triangleright x, h_{(2)} \triangleright (y \cdot a) \rangle_{\mathcal{A}}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle S(h_{(1)})^* \triangleright x, (h_{(2)} \triangleright y)(h_{(3)} \triangleright \cdot a) \rangle_{\mathcal{A}} \\
&= \langle S(h_{(1)})^* \triangleright x, (h_{(2)} \triangleright y) \rangle_{\mathcal{A}} (h_{(3)} \triangleright \cdot a) \\
&= (h_{(1)} \triangleright \langle x, y \rangle_{\mathcal{A}}) (h_{(2)} \triangleright a) \\
&= h \triangleright (\langle x, y \rangle_{\mathcal{A}} a).
\end{aligned}$$

ii.) Die  $H$ -Wirkung auf das  $\mathcal{A}$ -wertige innere Produkt auf  $({}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\langle \cdot, \cdot \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  ist kompatibel mit der  $\mathcal{B}$ -Rechtsmodulwirkung.

$$\begin{aligned}
h \triangleright \langle x, b \cdot y \rangle_{\mathcal{A}} &= \langle S(h_{(1)})^* \triangleright x, h_{(2)} \triangleright (b \cdot y) \rangle_{\mathcal{A}} \\
&= \langle S(h_{(1)})^* \triangleright x, (h_{(2)} \triangleright b) \cdot (h_{(3)} \triangleright y) \rangle_{\mathcal{A}} \\
&= \langle (h_{(2)} \triangleright b)^* \cdot (S(h_{(1)})^* \triangleright x), h_{(3)} \triangleright y \rangle_{\mathcal{A}} \\
&= \langle (S(h_{(2)})^* \triangleright b^*) \cdot (S(h_{(1)})^* \triangleright x), h_{(3)} \triangleright y \rangle_{\mathcal{A}} \\
&= \langle S(h_{(1)})^* \triangleright (b^* \cdot x), h_{(2)} \triangleright y \rangle_{\mathcal{A}} \\
&= h \triangleright \langle b^* \cdot x, y \rangle_{\mathcal{A}}.
\end{aligned}$$

Dabei nutzt man im vorletzten Schritt, daß für die Antipode  $S : H \rightarrow H$  einer HOPF- $^*$ -Algebra  $H$  gilt  $(S \otimes S) \circ \Delta^{\text{op}} = \Delta \circ S$  und für die  $^*$ -Involution  $(h \triangleright b)^* = S(h)^* \triangleright b^*$ .

iii.) Die  $H$ -Wirkung ist kompatibel mit der Kompatibilitätsbedingung der beiden inneren Produkte.

$$\begin{aligned}
h \triangleright (x \cdot \langle y, z \rangle_{\mathcal{A}}) &= (h_{(1)} \triangleright x) \cdot (h_{(2)} \triangleright \langle y, z \rangle_{\mathcal{A}}) \\
&= (h_{(1)} \triangleright x) \cdot \langle S(h_{(2)})^* \triangleright y, h_{(3)} \triangleright z \rangle_{\mathcal{A}} \\
&= {}_{\mathcal{B}}\langle h_{(1)} \triangleright x, S(h_{(2)})^* \triangleright y \rangle \cdot (h_{(3)} \triangleright z) \\
&= h_{(1)} \triangleright {}_{\mathcal{B}}\langle x, y \rangle \cdot (h_{(2)} \triangleright z) \\
&= h \triangleright ({}_{\mathcal{B}}\langle x, y \rangle \cdot z).
\end{aligned}$$

Analog zu den in i.) und ii.) gemachten Rechnungen zeigt man die Kompatibilitäten des anderen inneren Produkts.  $\square$

**Lemma 1.3.4** (Äquivalente Formulierung der  $H$ -Wirkung auf innere Produkte).

Die Bedingungen in Gleichungen (1.3.2) sind äquivalent zu

$$\langle x, h \triangleright y \rangle_{\mathcal{A}} = h_{(2)} \triangleright \langle h_{(1)}^* \triangleright x, y \rangle_{\mathcal{A}} \quad \text{und} \quad {}_{\mathcal{B}}\langle x, h \triangleright y \rangle = S(h_{(2)})^* \triangleright {}_{\mathcal{B}}\langle h_{(1)}^* \triangleright x, y \rangle. \quad (1.3.3)$$

*Beweis.* Der Beweis sind je zwei einfache Rechnungen (vergleiche Definition A.2.18).

$$\begin{aligned}
h_{(2)} \triangleright \langle h_{(1)}^* \triangleright x, y \rangle_{\mathcal{A}} &= \langle (S(h_{(2)(1)})^* h_{(1)}^*) \triangleright x, h_{(2)(2)} \triangleright y \rangle_{\mathcal{A}} \\
&= \langle (h_{(1)} S(h_{(2)(1)}))^* \triangleright x, h_{(2)(2)} \triangleright y \rangle_{\mathcal{A}} \\
&= \langle \varepsilon(h_{(1)})^* \triangleright x, h_{(2)} \triangleright y \rangle_{\mathcal{A}} \\
&= \langle x, (\varepsilon(h_{(1)}) h_{(2)}) \triangleright y \rangle_{\mathcal{A}} \\
&= \langle x, h \triangleright y \rangle_{\mathcal{A}}
\end{aligned}$$

sowie die Umkehrung

$$\langle S(h_{(1)})^* \triangleright x, h_{(2)} \triangleright y \rangle_{\mathcal{A}} = h_{(2)(2)} \triangleright \langle h_{(2)(1)}^* \triangleright (S(h_{(1)})^* \triangleright x), y \rangle_{\mathcal{A}}$$

$$\begin{aligned}
&= h_{(2)(2)} \triangleright \langle (S(h_{(1)})h_{(2)(1)})^* \triangleright x, y \rangle_{\mathcal{A}} \\
&= h_{(2)} \triangleright \langle \bar{\varepsilon}(h_{(1)})x, y \rangle_{\mathcal{A}} \\
&= h \triangleright \langle x, y \rangle_{\mathcal{A}}.
\end{aligned}$$

Analog rechnet man die Behauptung für das  $\mathcal{B}$ -wertige innere Produkt nach.  $\square$

**Bemerkung 1.3.5** ( $H$ -Wirkung auf Ausartungsraum).

Sei  $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  ein  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul mit einem ausgearteten inneren Produkt, so garantiert Gleichung (1.3.3), daß  $H \triangleright \mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{\perp} \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{\perp}$ . Damit übersteht die  $H$ -Wirkung die Quotientenbildung  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}/\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{\perp}$ , und  $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}/\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{\perp}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  wird zu einem nichtausgearteten,  $H$ -äquivalenten  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul mit innerem Produkt.

Damit haben wir die Wirkung einer HOPF- $*$ -Algebra auf einem Bimodul mit inneren Produkten definiert. Um eine  $H$ -äquivalente MORITA-Theorie zu formulieren, müssen wir angeben, wie die HOPF- $*$ -Algebra auf dem dualen Bimodul operiert.

**Lemma 1.3.6** (Wirkung  $\bar{\triangleright}$  auf dualen Bimodul  ${}_{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$ ).

Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$   $*$ -Algebren und  $({}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \triangleright)$  ein  $H$ -äquivalenter ( $*$ -, starker) MORITA-Äquivalenzbimodul, dann induziert die Wirkung  $\triangleright$  eine Wirkung  $\bar{\triangleright}$  auf dem dualen Bimodul  ${}_{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$  durch

$$h \bar{\triangleright} \bar{x} := \overline{S(h)^* \triangleright x}. \quad (1.3.4)$$

*Beweis.* Wir wollen zeigen, daß es sich um eine Wirkung handelt, vgl. Definition A.2.28. Seien im weiteren  $g, h \in H$ ,  $x \in {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  und die komplex konjugierten Größen aus dem dualen Bimodul  ${}_{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$  mit  $\bar{x}, \bar{y}$  etc. bezeichnet.

i.) Hintereinanderausführung zweier Wirkungen ist wieder eine Wirkung der HOPF-Algebra.

$$\begin{aligned}
g \bar{\triangleright} (h \bar{\triangleright} \bar{x}) &= g \bar{\triangleright} \overline{S(h)^* \triangleright x} \\
&= \overline{S(g)^* \triangleright S(h)^* \triangleright x} \\
&= \overline{(S(g)^* S(h)^*) \triangleright x} \\
&= \overline{(S(h)S(g))^* \triangleright x} \\
&= \overline{S(gh)^* \triangleright x} \\
&= (gh) \bar{\triangleright} \bar{x}.
\end{aligned}$$

ii.) Desweiteren muß das Einselement in der HOPF-Algebra eine triviale Wirkung haben.

$$1_H \bar{\triangleright} \bar{x} = \overline{S(1_H)^* \triangleright x} = \overline{1_H^* \triangleright x} = \overline{1_H \triangleright x} = \bar{x}.$$

iii.) Die Bimodulstrukturen müssen mit der Wirkung  $\bar{\triangleright}$  verträglich sein. Dabei bleibt die Wirkung auf den Algebren  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  jeweils unangetastet.

$$\begin{aligned}
h \bar{\triangleright} (a \cdot \bar{x}) &= h \bar{\triangleright} \overline{x \cdot a^*} \\
&= \overline{S(h)^* \triangleright (x \cdot a^*)} \\
&= \overline{(S(h_{(2)})^* \triangleright x) \cdot (S(h_{(1)})^* \triangleright a^*)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{(S(h_{(2)})^* \triangleright x) \cdot (h_{(1)} \triangleright a)^*} \\
&= (h_{(1)} \triangleright a) \cdot \overline{(S(h_{(2)})^* \triangleright x)} \\
&= (h_{(1)} \triangleright a) \cdot (h_{(2)} \overline{\triangleright x}).
\end{aligned}$$

Analog rechnet man die  $\mathcal{B}$ -Rechtswirkung auf  ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$  nach.

iv.) Nun gilt es noch zu zeigen, daß die Wirkung konsistent mit den inneren Produkten des Bimoduls ist.

$$\begin{aligned}
h \triangleright_{\mathcal{A}} \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle^{\overline{\varepsilon}} &= h \triangleright \langle x, y \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} \\
&= \langle S(h_{(1)})^* \triangleright x, h_{(2)} \triangleright y \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} \\
&= {}_{\mathcal{A}} \left\langle \overline{S(h_{(1)})^* \triangleright x}, \overline{h_{(2)} \triangleright y} \right\rangle^{\overline{\varepsilon}} \\
&= {}_{\mathcal{A}} \langle h_{(1)} \overline{\triangleright x}, S(h_{(2)})^* \overline{\triangleright y} \rangle^{\overline{\varepsilon}}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt genutzt, daß aus Gleichung (1.3.4) automatisch auch  $S(h)^* \overline{\triangleright x} = \overline{h \triangleright x}$  folgt, wie man durch eine Substitution sehen kann. Wieder rechnet man auf ähnliche Weise die Konsistenz mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}^{\overline{\varepsilon}}$  nach. □

### $H$ -äquivalente Darstellungstheorie

Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{D}$  zwei  $*$ -Algebren über dem Ring  $\mathbb{C}$ , die beide mit einer festen HOPF- $*$ -Algebra Wirkung  $(H, \triangleright)$  ausgestattet sind, so daß  $(H, \mathcal{A}, \triangleright)$  und  $(H, \mathcal{D}, \triangleright)$   $H$ -Modulalgebren mit  $*$ -Involution sind.

**Definition 1.3.7** ( $H$ -äquivalente Darstellung).

Sei nun  $(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}})$  ein  $\mathcal{D}$ -Rechtsmodul mit innerem Produkt. Man bezeichnet eine  $*$ -Darstellung  $(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}, \pi)$  der  $*$ -Algebra  $\mathcal{A}$  als  $H$ -äquivalent, wenn

$$\pi(h \triangleright a)x = h_{(1)} \triangleright (\pi(a)S(h_{(2)}) \triangleright x), \quad (1.3.5)$$

für alle  $a \in \mathcal{A}$ ,  $h \in H$  und  $x \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ . Desweiteren nennt man einen Verschränkungsoperator zwischen zwei  $H$ -äquivalenten Darstellungen  $T : (\mathcal{H}_{\mathcal{D}}, \pi) \rightarrow (\mathcal{H}'_{\mathcal{D}}, \pi')$   $H$ -äquivalent, falls für alle  $h \in H$  und  $x \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}}$  gilt

$$T(h \triangleright x) = h \triangleright T(x). \quad (1.3.6)$$

Wir bezeichnen die Kategorie der  $H$ -äquivalenten  $*$ -Darstellungen der  $*$ -Algebra  $\mathcal{A}$  auf  $\mathcal{D}$ -Rechtsmoduln mit  $*\text{-mod}_{\mathcal{D}, H}(\mathcal{A})$ . Die Unterkategorien der  $H$ -äquivalenten  $*$ -Darstellungen auf Prä-HILBERT-Moduln bezeichnet man analog dazu mit  $*\text{-Mod}_{\mathcal{D}, H}(\mathcal{A})$  sowie  $*\text{-rep}_{\mathcal{D}, H}(\mathcal{A})$  und  $*\text{-Rep}_{\mathcal{D}, H}(\mathcal{A})$ .

### 1.3.2 $H$ -äquivalente MORITA-Äquivalenzbimoduln

#### $H$ -äquivalente Tensorprodukte und RIEFFEL-Induktion

Gegeben einen  $\mathcal{B}$ -Rechtsmodul  $(\mathcal{H}_{\mathcal{B}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}})$  mit einem inneren Produkt und einen  $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ -Bimodul  $({}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} \langle \cdot, \cdot \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  mit zwei inneren Produkten, wobei die inneren Produkte jeweils mit beiden

Algebra-Wirkungen verträglich seien. Desweiteren seien sowohl  $(\mathcal{H}_B, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$  als auch der  $(B, \mathcal{A})$ -Bimodul  $({}_B\mathcal{E}_A, \langle \cdot, \cdot \rangle_B, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$   $H$ -äquivalent.

Wir haben eine kanonische  $H$ -Wirkung auf den Elementen von  $\mathcal{H}_B \otimes_B {}_B\mathcal{E}_A$  mittels

$$h \triangleright (x \otimes_B y) = (h_{(1)} \triangleright x) \otimes_B (h_{(2)} \triangleright y). \quad (1.3.7)$$

**Lemma 1.3.8** ( $H$ -Wirkung auf dem Modul  $\mathcal{H}_B \otimes_B {}_B\mathcal{E}_A$ ).

Die kanonische  $H$ -Wirkung auf dem Tensorprodukt  $\mathcal{H}_B \otimes_B {}_B\mathcal{E}_A$  (Gleichung (1.3.7)) ist mit dem inneren Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A^{\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}}$  verträglich, und macht  $(\mathcal{H}_B \otimes_B {}_B\mathcal{E}_A) / (\mathcal{H}_B \otimes_B {}_B\mathcal{E}_A)^\perp$  zu einem  $H$ -äquivalenten  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul mit innerem Produkt.

*Beweis.*

$$\begin{aligned} h \triangleright \langle x \otimes_B y, x' \otimes_B y' \rangle_A^{\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}} &= h \triangleright \left\langle y, \langle x, x' \rangle_B^{\mathcal{H}} \cdot y' \right\rangle_A^{\mathcal{E}} \\ &= \left\langle S(h_{(1)})^* \triangleright y, h_{(2)} \triangleright \left( \langle x, x' \rangle_B^{\mathcal{H}} \cdot y' \right) \right\rangle_A^{\mathcal{E}} \\ &= \left\langle S(h_{(1)})^* \triangleright y, \langle S(h_{(2)})^* \triangleright x, h_{(3)} \triangleright x' \rangle_B^{\mathcal{H}} \cdot (h_{(4)} \triangleright y') \right\rangle_A^{\mathcal{E}} \\ &= \left\langle S(h_{(2)})^* \triangleright x \otimes_B S(h_{(1)})^* \triangleright y, (h_{(3)} \triangleright x') \otimes_B (h_{(4)} \triangleright y') \right\rangle_A^{\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}} \\ &= \left\langle S(h_{(1)})^* \triangleright (x \otimes_B y), h_{(2)} \triangleright (x' \otimes_B y') \right\rangle_A^{\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}} \end{aligned}$$

Dabei nutzt man im letzten Schritt die Eigenschaft  $(S \otimes S) \circ \Delta = \Delta^{\text{op}} \circ S$  der Antipode, vergleiche Proposition A.2.14 *iii.*). Dies zeigt, daß das auf  $\mathcal{H}_B \otimes_B {}_B\mathcal{E}_A$  induzierte innere Produkt auch mit der  $H$ -Wirkung verträglich ist. Die Wirkung läßt sich via Bemerkung 1.3.5 auch auf den Quotienten  $(\mathcal{H}_B \otimes_B {}_B\mathcal{E}_A) / (\mathcal{H}_B \otimes_B {}_B\mathcal{E}_A)^\perp$  und somit auf  $\widehat{\otimes}_B$  übertragen, wodurch  $((\mathcal{H}_B \widehat{\otimes}_B {}_B\mathcal{E}_A), \langle \cdot, \cdot \rangle_A^{\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}})$  zu einem  $H$ -äquivalenten  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul mit innerem Produkt wird.  $\square$

Nun müssen wir analog zu Lemma 1.1.44 die Verträglichkeit der  $H$ -Wirkung mit den Morphismen zeigen.

**Lemma 1.3.9** (Verträglichkeit der  $H$ -Wirkung mit Morphismen).

Seien  $({}_B\mathcal{E}_A, \langle \cdot, \cdot \rangle_B, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$  und  $({}_B\mathcal{E}'_A, \langle \cdot, \cdot \rangle_B, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$  zwei  $H$ -äquivalente Bimoduln und  $(\mathcal{H}_B, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$  bzw.  $(\mathcal{H}'_B, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$  seien  $H$ -äquivalente  $B$ -Rechtsmoduln. Seien ferner  $S : {}_B\mathcal{E}_A \rightarrow {}_B\mathcal{E}'_A$  und  $T : \mathcal{H}_B \rightarrow \mathcal{H}'_B$   $H$ -äquivalente Verschränkungsoperatoren, so ist die  $H$ -Wirkung mit der Tensorproduktbildung verträglich.

*Beweis.* Seien  $x \in \mathcal{H}_B$  und  $y \in {}_B\mathcal{E}_A$ , so gilt

$$\begin{aligned} h \triangleright (S(x) \otimes_B T(y)) &= (h_{(1)} \triangleright S(x)) \otimes_B (h_{(2)} \triangleright T(y)) \\ &= S(h_{(1)} \triangleright x) \otimes_B T(h_{(2)} \triangleright y) \end{aligned}$$

Mit Lemma 1.1.44 zeigt dies die Verträglichkeit der  $H$ -Wirkung mit den Morphismen.  $\square$

Damit haben wir eine funktorielle Abbildung konstruiert, und wir können analog zu Gleichung (1.1.28) schreiben

$$\widehat{\otimes}_B : {}^*\text{-mod}_{B,H}(\mathcal{C}) \times {}^*\text{-mod}_{A,H}(\mathcal{B}) \rightarrow {}^*\text{-mod}_{A,H}(\mathcal{C}). \quad (1.3.8)$$

Das gewonnene innere Produkt  $\widehat{\otimes}$  ist bis auf die kanonische Isomorphie assoziativ (siehe Gleichung (1.1.27)). Da  $\widehat{\otimes}$  mit der vollständigen Positivität der inneren Produkte verträglich ist, überträgt sich Gleichung (1.3.8) auch auf die Kategorien  ${}^*\text{-rep}_{\mathcal{B},H}$  bzw. auf  ${}^*\text{-Mod}_{\mathcal{B},H}$  und  ${}^*\text{-Rep}_{\mathcal{B},H}$ . Analog zu Beispiel 1.1.47 können wir eine  $H$ -äquivalente Version der RIEFFEL-Induktion angeben.

**Definition 1.3.10** ( $H$ -äquivalente RIEFFEL-Induktion, Wechsel der Basisalgebra).

Seien  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}'$   ${}^*$ -Algebren über dem Ring  $\mathbb{C}$ , die alle mit einer Wirkung der HOPF- ${}^*$ -Algebra  $H$  im Sinne von Definition A.2.28 versehen seien. Desweiteren seien  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \in {}^*\text{-rep}_{\mathcal{A},H}(\mathcal{B})$  und  ${}_{\mathcal{D}}\mathcal{G}_{\mathcal{D}'} \in {}^*\text{-rep}_{\mathcal{D}',H}(\mathcal{D})$ .

i.) Wir bezeichnen den  $H$ -äquivalenten Funktor

$$R_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \cdot : {}^*\text{-rep}_{\mathcal{D},H}(\mathcal{A}) \rightarrow {}^*\text{-rep}_{\mathcal{D},H}(\mathcal{B}) \quad (1.3.9)$$

als  $H$ -äquivalente RIEFFEL-Induktion.

ii.) Desweiteren definieren wir den  $H$ -äquivalenten Wechsel der Basisalgebra durch den Funktor

$$S_{\mathcal{G}} = \cdot \widehat{\otimes}_{\mathcal{D}} {}_{\mathcal{D}}\mathcal{G}_{\mathcal{D}'} : {}^*\text{-rep}_{\mathcal{D},H}(\mathcal{A}) \rightarrow {}^*\text{-rep}_{\mathcal{D}',H}(\mathcal{A}). \quad (1.3.10)$$

Die Wirkungen auf Objekte und Morphismen sind die gleichen wie in den Beispielen 1.1.47.

### $H$ -äquivalente starke MORITA-Äquivalenz

**Definition 1.3.11** ( $H$ -äquivalenter Äquivalenzbimodul).

Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zwei  ${}^*$ -Algebren,  $({}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  ein  ${}^*$ -Äquivalenzbimodul und die Algebren wie auch der Bimodul seien mit einer  ${}^*$ -Wirkung der HOPF- ${}^*$ -Algebra  $H$  verträglich. Man nennt  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  einen  $H$ -äquivalenten  ${}^*$ -Äquivalenzbimodul, wenn zusätzlich die Gleichungen (1.3.2) für alle  $h \in H$  und  $x, y \in {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  erfüllt sind. Sind zusätzlich beide inneren Produkte vollständig positiv nennt man  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  einen  $H$ -äquivalenten starken MORITA-Äquivalenzbimodul.

**Definition 1.3.12** ( $H$ -äquivalent MORITA-äquivalente Algebren).

Gegeben seien zwei  ${}^*$ -Algebren  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$ , die beide mit einer  $H$ -Wirkung einer HOPF- ${}^*$ -Algebra verträglich sind. Man nennt die beiden Algebren  $H$ -äquivalent  ${}^*$ -MORITA-äquivalent (bzw.  $H$ -äquivalent stark MORITA-äquivalent) falls es einen  $H$ -äquivalenten  ${}^*$ -MORITA-Äquivalenzbimodul (bzw.  $H$ -äquivalenten starken MORITA-Äquivalenzbimodul) für die Algebren gibt.

**Satz 1.3.13** ( $H$ -äquivalente MORITA-Äquivalenz ist Äquivalenzrelation).

Für die idempotenten und nichtausgearteten  ${}^*$ -Algebren mit  ${}^*$ -Wirkungen einer HOPF- ${}^*$ -Algebra  $H$  ist  $H$ -äquivalente starke MORITA-Äquivalenz eine Äquivalenzrelation.

Desweiteren sind  $H$ -äquivalente  ${}^*$ -isomorphe  ${}^*$ -Algebren  $H$ -äquivalent stark MORITA-äquivalent und damit auch  $H$ -äquivalent  ${}^*$ -MORITA-äquivalent.

*Beweis.* Wir haben bereits mit Lemma 1.2.24 gezeigt, daß  ${}^*$ - und starke MORITA-Äquivalenz eine Äquivalenzrelation sind. Es bleibt die  $H$ -Äquivalenz zu zeigen. Für eines der kanonischen inneren Produkte auf  ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}_{\mathcal{A}}$  ergibt sich

$$h \triangleright \langle a, b \rangle_{\mathcal{A}} = h \triangleright (a^*b) = (h_{(1)} \triangleright a^*)(h_{(2)} \triangleright b) = (S(h_{(1)})^* \triangleright a)^*(h_{(2)}) \triangleright b$$



$$= \langle S(h_{(1)})^* \triangleright a, h_{(2)} \triangleright b \rangle_{\mathcal{A}},$$

und auf ähnliche Weise verhält es sich mit dem linksseitigen  $\mathcal{A}$ -wertigen inneren Produkt  ${}_{\mathcal{A}}\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Um die Symmetrie zu zeigen benötigen wir die induzierte  $H$ -Wirkung auf dem konjugierten Bimodul  ${}_{\mathcal{A}}\overline{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$ , die wir in Lemma 1.3.6 eingeführt haben. Die Transitivität ist eine Folge von Lemma 1.3.8 beziehungsweise der  $H$ -äquivalenten RIEFFEL-Induktion, die wir in Definition 1.3.10 eingeführt haben.  $\square$



## Kapitel 2

# MORITA-Äquivalenz von Cross-Produktalgebren

Ziel dieses Kapitels ist es Cross-Produktalgebren  $\mathcal{A} \rtimes H$  zu studieren. Dabei werden wir das PICARD-Gruppoid von Cross-Produktalgebren genauer betrachten und eine Verbindung zu der  $H$ -äquivarianten Theorie der zugrundeliegenden Algebra  $\mathcal{A}$  herstellen. Eine Einführung in die Cross-Produktalgebren findet sich in Anhang A.3 sowie in [MAJID 1995].

### 2.1 Cross-Produktalgebren von $*$ -Darstellungen

Seien im weiteren  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$   $*$ -Algebren mit Einselement und  $H$  sei eine HOPF- $*$ -Algebra, so daß  $(H, \mathcal{A}, \triangleright)$  und  $(H, \mathcal{B}, \triangleright)$   $*$ -Linksmodulalgebren sind. Dann sind  $\mathcal{A} \rtimes H$  und  $\mathcal{B} \rtimes H$  Cross-Produktalgebren nach Definition A.3.1, d. h. ist  $\mathcal{A}$  eine  $*$ -Algebra und  $H$  eine HOPF- $*$ -Algebra, dann ist die Cross-Produktalgebra als Raum das Tensorprodukt  $\mathcal{A} \otimes H$ , und Elemente sind von der Form  $a \otimes h$ , wobei  $a \in \mathcal{A}$  und  $h \in H$  ist. Die Multiplikation zweier Elemente in  $\mathcal{A} \rtimes H$  ist gegeben durch

$$(a \otimes h) \cdot (b \otimes g) = a \cdot (h_{(1)} \triangleright b) \otimes h_{(2)} g,$$

und die  $*$ -Involution durch

$$(a \otimes h)^* = h_{(1)}^* \triangleright a^* \otimes h_{(2)}^*.$$

**Lemma 2.1.1** (Isomorphie der Kategorien  $*\text{-mod}_H(\mathcal{A})$  und  $*\text{-mod}(\mathcal{A} \rtimes H)$ ).

Die Kategorien  $*\text{-mod}_H(\mathcal{A})$  und  $*\text{-mod}(\mathcal{A} \rtimes H)$  sind isomorph. Auf den Objekten ist die Isomorphie gegeben durch

$$*\text{-mod}_H(\mathcal{A}) \ni (\mathcal{H}, \pi) \mapsto (\hat{\mathcal{H}}, \hat{\pi}) \in *\text{-mod}(\mathcal{A} \rtimes H), \quad (2.1.1)$$

wobei  $\mathcal{H} = \hat{\mathcal{H}}$  als Prä-HILBERT-Raum ist, und  $\hat{\pi}(a \otimes h)\phi = \pi(a)h \triangleright \phi$  mit  $\phi \in \mathcal{H}$  gilt. Auf den Morphismen  $T : (\mathcal{H}_1, \pi_1) \rightarrow (\mathcal{H}_2, \pi_2)$  ist die Isomorphie durch die Identitätsabbildung gegeben. Analoges gilt auch für  $*\text{-Mod}$ ,  $*\text{-rep}$  und  $*\text{-Rep}$ .

*Beweis.* Der Beweis ist klar. Die Prä-HILBERT-Räume sind als Räume identisch und die Morphismen gehen durch den Identitätsfunktork ineinander über.  $\square$

**Proposition 2.1.2** (Positivität).

Sei  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  ein  $H$ -invariantes, positives lineares Funktional und  $\rho : H \rightarrow \mathbb{C}$  ein positives lineares Funktional, dann ist auch  $\omega \otimes \rho : \mathcal{A} \rtimes H \rightarrow \mathbb{C}$  positiv.

*Beweis.* Sei  $\sum_i a_i \otimes h_i$  gegeben. Eine einfache Rechnung, die Invarianz von  $\omega$  nutzend, gibt

$$(\omega \otimes \rho) \left( \left( \sum_i a_i \otimes h_i \right)^* \left( \sum_j a_j \otimes h_j \right) \right) = \sum_{i,j} \omega(a_i^* a_j) \rho(h_i^* h_j) \geq 0,$$

und wenn sowohl  $\omega$  als auch  $\rho$  positive lineare Funktionale sind, sind sie auch vollständig positiv (im Sinne vollständig positiver Abbildungen) [BURSZTYN & WALDMANN 2001b, Lemma 4.3].  $\square$

**Beispiele 2.1.3** (Positives Funktionale auf  $\mathcal{A} \rtimes H$ ).

- i.) Ein erstes Beispiel für ein positives Funktional auf  $\mathcal{A} \rtimes H$  ist  $\omega \otimes \varepsilon : \mathcal{A} \rtimes H \rightarrow \mathbb{C}$ , wobei  $\omega$  positiv und  $H$ -invariant ist. Dabei bezeichnet  $\varepsilon : H \rightarrow \mathbb{C}$  die Koeins der HOPF- $*$ -Algebra.
- ii.) Allgemeiner gilt, daß wenn  $\chi : H \rightarrow \mathbb{C}$  ein *unitärer Charakter*, d. h. ein  $*$ -Homomorphismus ist, dann ist  $\omega \otimes \chi : \mathcal{A} \rtimes H \rightarrow \mathbb{C}$  ein positives Funktional.

**Lemma 2.1.4** ( $(\mathcal{B} \rtimes H, \mathcal{A} \rtimes H)$ -Bimodul).

Sei  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \in {}^*\text{-mod}_{\mathcal{A},H}(\mathcal{B})$ , dann wird  $\mathcal{E} \otimes H$  durch die beiden Verknüpfungen

$$(b \otimes g) \cdot (x \otimes h) := (b \cdot g_{(1)} \triangleright x) \otimes (g_{(2)} h) \quad \text{und} \quad (x \otimes g) \cdot (a \otimes h) := (x \cdot g_{(1)} \triangleright a) \otimes (g_{(2)} h) \quad (2.1.2)$$

zu einem  $(\mathcal{B} \rtimes H, \mathcal{A} \rtimes H)$ -Bimodul. Desweiteren definiert

$$\langle x \otimes g, y \otimes h \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\mathcal{E} \otimes H} := (g_{(1)}^* \triangleright \langle x, y \rangle_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}}) \otimes g_{(2)}^* h \quad (2.1.3)$$

ein  $\mathcal{A} \rtimes H$ -wertiges inneres Produkt auf  $\mathcal{E} \otimes H$ , und es gilt

$$\langle (b \otimes g) \cdot (x \otimes h), y \otimes k \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\mathcal{E} \otimes H} = \langle x \otimes h, (b \otimes g)^* \cdot (y \otimes k) \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\mathcal{E} \otimes H}. \quad (2.1.4)$$

*Beweis.* Zuerst muß man zeigen, daß es sich bei  ${}_{\mathcal{B} \rtimes H} \mathcal{E} \otimes H_{\mathcal{A} \rtimes H}$  um einen Bimodul handelt. Dazu rechnet man nach

$$\begin{aligned} ((b \otimes h)(b' \otimes h')) \cdot (x \otimes g) &= (b(h_{(1)} \triangleright b') \otimes h_{(2)} h') \cdot (x \otimes g) \\ &= b(h_{(1)} \triangleright b') \cdot ((h_{(2)} h')_{(1)} \triangleright x) \otimes (h_{(2)} h')_{(2)} g \\ &= b(h_{(1)} \triangleright b') \cdot (h_{(2)(1)} \triangleright h'_{(1)} \triangleright x) \otimes h_{(3)} h'_{(2)} g \\ &= b \cdot (h_{(1)} \triangleright (b' \cdot (h'_{(1)} \triangleright x))) \otimes h_{(2)} h'_{(2)} g \\ &= (b \otimes h) \cdot (b' (h'_{(1)} \triangleright x) \otimes h'_{(2)} g) \\ &= (b \otimes h) \cdot ((b' \otimes h') \cdot (x \otimes g)) \end{aligned}$$

und analog zeigt man die  $\mathcal{A} \rtimes H$ -Rechtswirkung beziehungsweise die Verträglichkeit der  $\mathcal{A} \rtimes H$ -Rechtswirkung mit der  $\mathcal{B} \rtimes H$ -Linkswirkung. Aufgrund der „symmetrischen“ Struktur reicht es, nur eine Wirkung zu zeigen. Desweiteren ist zu zeigen, daß das innere Produkt auf  ${}_{\mathcal{B} \rtimes H} \mathcal{E} \otimes H_{\mathcal{A} \rtimes H}$  sinnvoll definiert ist. Die  $\mathbb{C}$ -Sesquilinearität kann man gleich ablesen. Die  $*$ -Involution des inneren Produkts entspricht der Vertauschung der Argumente, wie die folgende Rechnung zeigt.

$$\begin{aligned}
\left(\langle x \otimes g, x' \otimes g' \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\varepsilon \otimes H}\right)^* &= \left(g_{(1)}^* \triangleright \langle x, x' \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} \otimes g_{(2)}^* g'\right)^* \\
&= (g_{(2)}^* g')_{(2)}^* \triangleright \left(g_{(1)}^* \triangleright \langle x, x' \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon}\right)^* \otimes (g_{(2)}^* g')_{(2)}^* \\
&= g_{(1)'}^* (S(g_{(1)}^*) g_{(2)}^*)^* \triangleright \left(\langle x, x' \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon}\right)^* \otimes g_{(2)'}^* g_{(3)} \\
&= g_{(1)'}^* \overline{\varepsilon(g_{(1)}^*)} \triangleright \langle x', x \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} \otimes g_{(2)'}^* g_{(3)} \\
&= g_{(1)'}^* \triangleright \langle x', x \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} \otimes g_{(2)'}^* g_{(3)} \\
&= \langle x' \otimes g', x \otimes g \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\varepsilon \otimes H}.
\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt nutzt man die Linearität von  $\otimes$  bezüglich Elementen in  $\mathbb{C}$  sowie die Tatsache, daß in einer HOPF-Algebra  $\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)} = h$  ist.

Bleibt zu zeigen, daß das  $\mathcal{A} \rtimes H$ -wertige innere Produkt mit der  $\mathcal{A} \rtimes H$ -Rechtswirkung verträglich ist

$$\begin{aligned}
\langle x \otimes g, (x' \otimes g') \cdot (a \otimes h) \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\varepsilon \otimes H} &= \langle x \otimes g, x' \cdot (g_{(1)}' \triangleright a) \otimes g_{(2)}' h \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\varepsilon \otimes H} \\
&= g_{(1)}^* \triangleright \langle x, x' \cdot (g_{(1)}' \triangleright a) \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} \otimes g_{(2)}^* g_{(2)'}' h \\
&= g_{(1)}^* \triangleright \left(\langle x, x' \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} (g_{(1)}' \triangleright a)\right) \otimes g_{(2)}^* g_{(2)'}' h \\
&= \left(g_{(1)}^* \triangleright \langle x, x' \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon}\right) (g_{(2)}^* g_{(1)'}' \triangleright a) \otimes g_{(3)}^* g_{(2)'}' h \\
&= \left(g_{(1)}^* \triangleright \langle x, x' \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} \otimes g_{(2)}^* g_{(2)'}'\right) (a \otimes h) \\
&= \langle x \otimes g, (x' \otimes g') \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\varepsilon \otimes H} (a \otimes h).
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 2.1.5** ( $\mathcal{B} \rtimes H$ -wertiges inneres Produkt).

Wir können auf  $\mathcal{E} \otimes H$  auch ein  $\mathcal{B} \rtimes H$ -wertiges inneres Produkt definieren, wenn der Bimodul  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  mit einem  $\mathcal{B}$ -wertigen inneren Produkt ausgestattet ist. Analog zu Lemma 2.1.4 erbt das  $\mathcal{B} \rtimes H$ -wertige innere Produkt alle Strukturen.

**Bemerkung 2.1.6** (Ausartungsraum von  $\mathcal{E} \otimes H$ ).

Es kann passieren, daß das innere Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\varepsilon \otimes H}$  ausgeartet ist. Ist dies der Fall, so geht man zum Quotienten

$$\mathcal{E} \rtimes H = \mathcal{E} \otimes H / (\mathcal{E} \otimes H)^{\perp} \quad (2.1.5)$$

über, der mit der Bimodulstruktur und den inneren Produkten verträglich ist.

**Satz 2.1.7** (Vollständige Positivität und Nichtausgeartetheit, [JANSEN & WALDMANN 2006, Lemma 6.6]).

Sei  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \in {}^*\text{-rep}_{\mathcal{A},H}(\mathcal{B})$ , dann ist das innere Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\varepsilon \otimes H}$  vollständig positiv, woraus folgt, daß  ${}_{\mathcal{B} \rtimes H}\mathcal{E} \rtimes H_{\mathcal{A} \rtimes H} \in {}^*\text{-rep}_{\mathcal{A} \rtimes H}(\mathcal{B} \rtimes H)$  eine  $*$ -Darstellung auf einem Prä-HILBERT-Modul ist. Desweiteren ist für  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \in {}^*\text{-Mod}_{\mathcal{A},H}(\mathcal{B})$   ${}_{\mathcal{B} \rtimes H}\mathcal{E} \rtimes H_{\mathcal{A} \rtimes H} \in {}^*\text{-Mod}_{\mathcal{A} \rtimes H}(\mathcal{B} \rtimes H)$  und  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \in {}^*\text{-Rep}_{\mathcal{A},H}(\mathcal{B})$   ${}_{\mathcal{B} \rtimes H}\mathcal{E} \rtimes H_{\mathcal{A} \rtimes H} \in {}^*\text{-Rep}_{\mathcal{A} \rtimes H}(\mathcal{B} \rtimes H)$ .

*Beweis.* Seien  $\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(n)} \in \mathcal{E} \otimes H$  gegeben und sei  $\Phi^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^m x_i^{(\alpha)} \otimes h_i^{(\alpha)}$  mit  $x_i^{(\alpha)} \in \mathcal{E}$  und  $h_i^{(\alpha)} \in H$ , und  $m$  sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit für alle  $\alpha = 1, \dots, n$  dasselbe. Dann gilt

$$\langle \Phi^{(\alpha)}, \Phi^{(\beta)} \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\mathcal{E} \otimes H} = \sum_{i, \ell=1}^m \left( (h_i^{(\alpha)})_{(1)}^* \triangleright \langle x_i^{(\alpha)}, x_\ell^{(\beta)} \rangle_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}} \right) \otimes (h_i^{(\alpha)})_{(2)}^* h_\ell^{(\beta)}.$$

Wir definieren die folgende Abbildung

$$f : M_{nm}(\mathcal{A}) \ni A = (A_{i\ell}^{\alpha\beta}) \mapsto ((h_i^{(\alpha)})_{(1)}^* \triangleright A_{i\ell}^{\alpha\beta} \otimes (h_i^{(\alpha)})_{(2)}^* h_\ell^{(\beta)}) \in M_{nm}(\mathcal{A} \rtimes H),$$

die positiv ist, wie die folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} f(A^* A) &= \sum_{\gamma, k} ((h_i^{(\alpha)})_{(1)}^* \triangleright ((A_{ki}^{\gamma\alpha})^* A_{k\ell}^{\gamma\beta}) \otimes (h_i^{(\alpha)})_{(2)}^* h_\ell^{(\beta)}) \\ &= \sum_{\gamma, k} (((h_i^{(\alpha)})_{(1)}^* \triangleright (A_{ki}^{\gamma\alpha})^* \otimes (h_i^{(\alpha)})_{(2)}^*)) (A_{k\ell}^{\gamma\beta} \otimes h_\ell^{(\beta)}) \\ &= \sum_{\gamma, k} (A_{ki}^{\gamma\alpha} \otimes h_i^{(\alpha)})^* (A_{k\ell}^{\gamma\beta} \otimes h_\ell^{(\beta)}) \\ &= (A \otimes h)^* (A \otimes h). \end{aligned}$$

Dabei ist  $A \otimes h \in M_{nm}(\mathcal{A} \rtimes H)$  gegeben durch die Koeffizientenmatrix  $(A \otimes h)_{i\ell}^{\alpha\beta} = A_{i\ell}^{\alpha\beta} \otimes h_\ell^{(\beta)}$ . Also ist  $f(A^* A) \in M_{nm}(\mathcal{A} \rtimes H)^{++}$ , da  $f$  positiv ist. Weil  $(\langle x_i^{(\alpha)}, x_\ell^{(\beta)} \rangle_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}})$  eine positive Matrix in  $M_{nm}(\mathcal{A})$  ist, da das innere Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}}$  vollständig positiv ist, ist auch die Abbildung  $f \left( (\langle x_i^{(\alpha)}, x_\ell^{(\beta)} \rangle_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}}) \right)$  positiv. Die Summation über  $i, \ell$  ist eine positive Abbildung, wie in [BURSZTYN & WALDMANN 2003, Example 2.1] gezeigt wurde, und das Ergebnis ist wieder positiv. Somit ist die vollständige Positivität des inneren Produkts  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\mathcal{E} \otimes H}$  gezeigt, und die vollständige Positivität von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\mathcal{E} \rtimes H}$  folgt. Zu zeigen, daß die inneren Produkte nicht ausgeartet sind, ist trivial.  $\square$

### Bemerkung 2.1.8.

Im Fall daß die Algebra  $\mathcal{A}$  mit einem Einselement ausgestattet ist, vereinfacht sich der Beweis zu Satz 2.1.7, denn man sieht an folgendem Ausdruck leicht

$$\langle x \otimes g, y \otimes h \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\mathcal{E} \otimes H} = (1_{\mathcal{A}} \otimes g)^* (\langle x, y \rangle_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}} \otimes 1_H) (1_{\mathcal{A}} \otimes h)$$

die vollständige Positivität von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\mathcal{E} \otimes H}$ .

Wir wollen nun zeigen, daß der Übergang von einem  $H$ -äquivarianten Bimodul mit inneren Produkten  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  zu dem Bimodul  ${}_{\mathcal{B} \rtimes H}\mathcal{E} \rtimes H_{\mathcal{A} \rtimes H}$  funktoriell geschieht.

### Lemma 2.1.9 (Verschränkungsoperator).

Sei  $T : {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \rightarrow {}_{\mathcal{B}}\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$  ein Verschränkungsoperator zwischen  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, {}_{\mathcal{B}}\mathcal{F}_{\mathcal{A}} \in {}^*\text{-mod}_{\mathcal{A}, H}(\mathcal{B})$ , dann ist die Abbildung  $T \otimes \text{id}_H : \mathcal{E} \otimes H \rightarrow \mathcal{F} \otimes H$  ein Verschränkungsoperator zwischen  $\mathcal{E} \rtimes H$  und  $\mathcal{F} \rtimes H \in {}^*\text{-mod}_{\mathcal{A} \rtimes H}(\mathcal{B} \rtimes H)$ , dessen Adjungierte durch  $T^* \otimes \text{id}_H$  gegeben ist.

*Beweis.* Der Beweis nutzt die  $H$ -Äquivarianz von  $T$ , sowie die Existenz des adjungierten Operators  $T^*$ .  $\square$

Damit sind wir nun in der Lage die folgende Proposition zu formulieren.

**Proposition 2.1.10** (Die funktorielle Abbildung  $\cdot \rtimes H$ ).

Die Abbildung

$$\cdot \rtimes H : {}^*\text{-mod}_{\mathcal{A},H}(\mathcal{B}) \rightarrow {}^*\text{-mod}_{\mathcal{A} \rtimes H}(\mathcal{B} \rtimes H) \quad (2.1.6)$$

ist ein Funktor. Auf den Objekten bildet der Funktor Bimoduln auf deren Cross-Produktalgebren ab  $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E} \rtimes H$  und auf den Morphismen die Bimodulmorphismen auf das Tensorprodukt der Morphismen mit der Identität auf der HOPF- $*$ -Algebra  $T \mapsto T \otimes \text{id}_H$ . Die Einschränkung auf die Unterkategorien von  ${}^*\text{-mod}_{\mathcal{A},H}(\mathcal{B})$  liefert die folgenden Funktoren

$$\cdot \rtimes H : {}^*\text{-Mod}_{\mathcal{A},H}(\mathcal{B}) \rightarrow {}^*\text{-Mod}_{\mathcal{A} \rtimes H}(\mathcal{B} \rtimes H), \quad (2.1.7)$$

$$\cdot \rtimes H : {}^*\text{-rep}_{\mathcal{A},H}(\mathcal{B}) \rightarrow {}^*\text{-rep}_{\mathcal{A} \rtimes H}(\mathcal{B} \rtimes H), \quad (2.1.8)$$

$$\cdot \rtimes H : {}^*\text{-Rep}_{\mathcal{A},H}(\mathcal{B}) \rightarrow {}^*\text{-Rep}_{\mathcal{A} \rtimes H}(\mathcal{B} \rtimes H). \quad (2.1.9)$$

Da wir über die MORITA-Äquivalenz sowie das PICARD-Gruppoid von Cross-Produktalgebren reden wollen, müssen wir die Verträglichkeit des in Proposition 2.1.10 beschriebenen Funktors mit der RIEFFEL-Induktion, das heißt mit dem Tensorieren von Bimoduln, prüfen.

**Proposition 2.1.11.**

Sei nun  ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{F}_{\mathcal{B}} \in {}^*\text{-mod}_{\mathcal{B},H}(\mathcal{C})$  und  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \in {}^*\text{-mod}_{\mathcal{A},H}(\mathcal{B})$ , dann existieren die beiden folgenden kanonischen Isomorphismen.

i.) Die Abbildung

$$\begin{aligned} I_1 : {}_{\mathcal{C} \rtimes H}\mathcal{F} \rtimes H_{\mathcal{B} \rtimes H} \widehat{\otimes}_{\mathcal{B} \rtimes H} {}_{\mathcal{B} \rtimes H}\mathcal{E} \rtimes H_{\mathcal{A} \rtimes H} &\rightarrow {}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F} \widehat{\otimes}_{\mathcal{B}} \mathcal{E})_{\mathcal{A}} \otimes H \\ (x \otimes g) \widehat{\otimes}_{\mathcal{B} \rtimes H} (y \otimes h) &\mapsto (x \widehat{\otimes}_{\mathcal{B}} (g_{(1)} \triangleright y)) \otimes g_{(2)} h \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

ist ein kanonischer Isomorphismus von  $*$ -Darstellungen von  $\mathcal{C} \rtimes H$  auf  $\mathcal{A} \rtimes H$ -Rechtsmoduln mit innerem Produkt.

ii.) Die Abbildung

$$I_2 : \overline{{}_{\mathcal{C}}\mathcal{F} \rtimes H} \rightarrow \overline{{}_{\mathcal{C}}\mathcal{E} \rtimes H}, \quad \overline{x \otimes h} \mapsto h_{(1)}^* \overline{x} \otimes h_{(2)}^*, \quad (2.1.11)$$

ist ein kanonischer Isomorphismus von  $\mathcal{B} \rtimes H$ -Rechtsdarstellungen auf  $\mathcal{A} \rtimes H$ -Linksmoduln mit inneren Produkten. Das Inverse ist explizit gegeben durch

$$I_2^{-1}(\overline{x} \otimes h) = \overline{h_{(1)}^* \triangleright x \otimes h_{(2)}^*}. \quad (2.1.12)$$

*Beweis.* Es ist leicht zu sehen, daß die Abbildung  $I_1$  eine wohldefinierte Bimodulabbildung über dem Tensorprodukt  $\widehat{\otimes}_{\mathcal{B} \rtimes H}$  ist. Für die Isometrie rechnen wir nach

$$\begin{aligned} &\langle (x \widehat{\otimes}_{\mathcal{B}} (g_{(1)} \triangleright y)) \otimes g_{(2)} h, (x' \widehat{\otimes}_{\mathcal{B}} (g'_{(1)} \triangleright y')) \otimes g'_{(2)} h' \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{(\mathcal{F} \widehat{\otimes}_{\mathcal{B}} \mathcal{E}) \rtimes H} \\ &= \left( (h_{(1)}^* g_{(2)}^*) \triangleright \langle x \otimes_{\mathcal{B}} (g_{(1)} \triangleright y), x' \otimes_{\mathcal{B}} (g'_{(1)} \triangleright y') \rangle_{\mathcal{A}}^{\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}} \right) \otimes h_{(2)}^* g_{(3)}^* g'_{(2)} h' \\ &= \left( (h_{(1)}^* g_{(2)}^*) \triangleright \left\langle g_{(1)} \triangleright y, \langle x, x' \rangle_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} \cdot (g'_{(1)} \triangleright y') \right\rangle_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}} \right) \otimes h_{(2)}^* g_{(3)}^* g'_{(2)} h' \\ &= \left( h_{(1)}^* \triangleright \left\langle (S(g_{(2)}^*)^* g_{(1)}) \triangleright y, g_{(3)}^* \triangleright \left( \langle x, x' \rangle_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} \cdot (g'_{(1)} \triangleright y') \right) \right\rangle_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}} \right) \otimes h_{(2)}^* g_{(4)}^* g'_{(2)} h' \\ &= \left( h_{(1)}^* \triangleright \left\langle y, (g_{(1)}^* \triangleright \langle x, x' \rangle_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}) \cdot (g_{(2)}^* g'_{(1)}) \triangleright y' \right\rangle_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}} \right) \otimes h_{(2)}^* g_{(3)}^* g'_{(2)} h' \\ &= \left\langle y \otimes h, \left( (g_{(1)}^* \triangleright \langle x, x' \rangle_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}) \cdot (g_{(2)}^* g'_{(1)}) \triangleright y' \right) \otimes (g_{(2)}^* g'_{(2)}) h' \right\rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\mathcal{E} \rtimes H} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle y \otimes h, \left( (g_{(1)}^* \triangleright \langle x, x' \rangle_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}) \otimes g_{(2)}^* g' \right) \cdot (y' \otimes h') \right\rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\varepsilon \rtimes H} \\
&= \left\langle y \otimes h, \langle x \otimes g, x' \otimes g' \rangle_{\mathcal{B} \rtimes H}^{\mathcal{F} \rtimes H} \cdot (y' \otimes h') \right\rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\varepsilon \rtimes H} \\
&= \left\langle (x \otimes g) \otimes_{\mathcal{B}} (y \otimes h), (x' \otimes g') \otimes_{\mathcal{B}} (y' \otimes h') \right\rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{(\mathcal{F} \rtimes H) \widehat{\otimes} (\varepsilon \rtimes H)}
\end{aligned}$$

wodurch die Abbildung  $I_1$  schon auf der Ebene des Tensorprodukts  $\otimes_{\mathcal{B}}$  isometrisch wird, und nicht erst nach der Quotientenbildung zu  $\widehat{\otimes}_{\mathcal{B}}$ . Injektivität folgt, da die Quotienten beider inneren Produkte nichtausgeartet sind. Die Surjektivität ist offensichtlich, da  $(x \otimes 1_H) \otimes_{\mathcal{B}} (y \otimes h) \mapsto (x \otimes_{\mathcal{B}} y) \otimes h$ . Somit ist  $I_1$  ein Isomorphismus. Im folgenden Sinn kann man die Abbildung  $I_1$  als kanonisch ansehen:

Seien  $S : {}_{\mathcal{B}}\mathcal{F}_{\mathcal{B}} \rightarrow {}_{\mathcal{B}}\mathcal{F}'_{\mathcal{B}}$  und  $T : {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \rightarrow {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}'_{\mathcal{A}}$  Morphismen in den Kategorien  ${}^*\text{-mod}_{\mathcal{B},H}(\mathcal{C})$  und  ${}^*\text{-mod}_{\mathcal{A},H}(\mathcal{B})$ , dann ist  $S \widehat{\otimes}_{\mathcal{B}} T$  ein Morphismus in  ${}^*\text{-mod}_{\mathcal{A},H}(\mathcal{C})$  und  $S \otimes \text{id}_H$  bzw.  $T \otimes \text{id}_H$  die korrespondierenden Morphismen in  ${}^*\text{-mod}_{\mathcal{B} \rtimes H}(\mathcal{C} \rtimes H)$  bzw.  ${}^*\text{-mod}_{\mathcal{A} \rtimes H}(\mathcal{B} \rtimes H)$ , nach Lemma 2.1.9. Die Abbildung  $I_1$  ist kompatibel mit den Morphismen und es gilt

$$I_1 \circ ((S \otimes \text{id}_H) \widehat{\otimes}_{\mathcal{B} \rtimes H} (T \otimes \text{id}_H)) = ((S \widehat{\otimes}_{\mathcal{B}} T) \otimes \text{id}_H) \circ I_1.$$

Der zweite Teil folgt aus der einfachen, jedoch länglichen Rechnung, daß  $I_2$  ein Bimodulmorphismus ist und die notwendige  $\mathbb{C}$ -Linearität besitzt. Die Isometrie folgt aus der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned}
&{}_{\mathcal{A} \rtimes H} \langle I_2(\overline{x \otimes g}), I_2(\overline{y \otimes h}) \rangle^{\overline{\varepsilon \rtimes H}} \\
&= {}_{\mathcal{A} \rtimes H} \langle (g_{(1)}^* \triangleright \overline{x}) \otimes g_{(2)}^*, (h_{(1)}^* \triangleright \overline{y}) \otimes h_{(2)}^* \rangle^{\overline{\varepsilon \rtimes H}} \\
&= {}_{\mathcal{A} \rtimes H} \left\langle \overline{S(g_{(1)}^*)^* \triangleright x \otimes g_{(2)}^*}, \overline{S(h_{(1)}^*)^* \triangleright y \otimes h_{(2)}^*} \right\rangle^{\overline{\varepsilon \rtimes H}} \\
&= \left( g_{(3)}^* \triangleright_A \left\langle S^{-1}(g_{(2)}^*) \triangleright \overline{(S^{-1}(g_{(1)}^*) \triangleright x)}, S^{-1}(h_{(2)}^*) \triangleright \overline{(S^{-1}(h_{(1)}^*) \triangleright y)} \right\rangle^{\varepsilon} \right) \otimes g_{(4)}^* h_{(3)} \\
&= \left( g_{(3)}^* \triangleright_A \left\langle \overline{(g_{(2)} S^{-1}(g_{(1)})) \triangleright x}, \overline{(h_{(2)} S^{-1}(h_{(1)})) \triangleright y} \right\rangle^{\varepsilon} \right) \otimes g_{(4)}^* h_{(3)} \\
&= (g_{(1)}^* \triangleright \langle x, y \rangle_A^{\varepsilon}) \otimes g_{(2)}^* h \\
&= {}_{\mathcal{A} \rtimes H} \langle \overline{x \otimes g}, \overline{y \otimes h} \rangle^{\overline{\varepsilon \rtimes H}}.
\end{aligned}$$

Analog zu  $I_1$  zeigt man die Verträglichkeit von  $I_2$  mit den Verschränkungsoperatoren.  $\square$

Die Verträglichkeit der Funktoren können wir im folgenden Diagramm graphisch verdeutlichen.

**Korollar 2.1.12.**

Das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
{}^*\text{-mod}_{\mathcal{B},H}(\mathcal{C}) \times {}^*\text{-mod}_{\mathcal{A},H}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\widehat{\otimes}_{\mathcal{B}}} & {}^*\text{-mod}_{\mathcal{A},H}(\mathcal{C}) \\
\downarrow (\rtimes H) \times (\rtimes H) & & \downarrow \cdot \rtimes H \\
{}^*\text{-mod}_{\mathcal{B} \rtimes H}(\mathcal{C} \rtimes H) \times {}^*\text{-mod}_{\mathcal{A} \rtimes H}(\mathcal{B} \rtimes H) & \xrightarrow{\widehat{\otimes}_{\mathcal{B} \rtimes H}} & {}^*\text{-mod}_{\mathcal{A} \rtimes H}(\mathcal{C} \rtimes H)
\end{array} \tag{2.1.13}$$

kommutiert im funktoriellen Sinne, d. h. bis auf die natürliche Transformation  $I_1$ .



## 2.2 Das PICARD-Gruppoid von Cross-Produktalgebren

Nach der Betrachtung von allgemeinen  $*$ -Darstellungen, wollen wir uns nun den Cross-Produktalgebren widmen, die wir mit Hilfe des Funktors  $\cdot \rtimes H$  aus MORITA-Äquivalenzbimoduln erhalten. Diese werden sich ebenfalls als Äquivalenzbimoduln herausstellen, so daß wir darauf aufbauend das PICARD-Gruppoid von Cross-Produktalgebren betrachten können.

### Lemma 2.2.1.

Sei  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  ein  $H$ -äquivarianter  $*$ -MORITA-Äquivalenzbimodul (bzw. starker MORITA-Äquivalenzbimodul), so ist  ${}_{\mathcal{B} \rtimes H}\mathcal{E} \rtimes H_{\mathcal{A} \rtimes H}$  mit den induzierten inneren Produkten ein  $*$ -MORITA-Äquivalenzbimodul (bzw. starker MORITA-Äquivalenzbimodul) für die Algebren  $\mathcal{B} \rtimes H$  und  $\mathcal{A} \rtimes H$ .

*Beweis.* Der Bimodul  $\mathcal{E} \otimes H$  hat die beiden geerbten inneren Produkt  ${}_{\mathcal{B} \rtimes H}\langle \cdot, \cdot \rangle^{\varepsilon \otimes H}$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\varepsilon \otimes H}$ , die wie folgt definiert sind

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{B} \rtimes H}\langle x \otimes h, x' \otimes h' \rangle^{\varepsilon \otimes H} &= \left( h_{(2)} \triangleright_{\mathcal{B}} \langle S^{-1}(h_{(1)}) \triangleright x, S^{-1}(h'_{(1)}) \triangleright x' \rangle^{\varepsilon} \right) \otimes h_{(3)} h'_{(2)} \\ &= {}_{\mathcal{B}}\langle x, S(h_{(1)})^* S^{-1}(h'_{(1)}) \triangleright x' \rangle^{\varepsilon} \otimes h_{(2)} h'^*_{(2)}, \end{aligned}$$

und analog das  $\mathcal{A} \rtimes H$ -wertige Produkt aus Lemma 2.1.4

$$\begin{aligned} \langle x \otimes h, x' \otimes h' \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\varepsilon \otimes H} &= \left( h^*_{(1)} \triangleright \langle x, x' \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} \right) \otimes h^*_{(2)} h' \\ &= \langle S(h^*_{(1)})^* \triangleright x, h^*_{(2)} \triangleright x' \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} \otimes h^*_{(3)} h'. \end{aligned}$$

Beide inneren Produkte sind mit der  $(\mathcal{B} \rtimes H, \mathcal{A} \rtimes H)$ -Bimodulstruktur verträglich und haben die richtigen Linearität. Wir müssen nun zeigen, daß die beiden inneren Produkte miteinander verträglich sind. Dies ist eine einfache Konsequenz aus der Verträglichkeit der inneren Produkte des Äquivalenzbimoduls  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ , denn es gilt

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{B} \rtimes H}\langle x \otimes g, y \otimes h \rangle^{\varepsilon \otimes H} \cdot (z \otimes k) &= \left( {}_{\mathcal{B}}\langle x, S(g_{(1)})^* S^{-1}(h_{(1)}) \triangleright y \rangle^{\varepsilon} \otimes g_{(2)} h^*_{(2)} \right) \cdot (z \otimes k) \\ &= {}_{\mathcal{B}}\langle x, S(g_{(1)})^* S^{-1}(h_{(1)}) \triangleright y \rangle^{\varepsilon} \otimes g_{(2)} h^*_{(2)} ((g_{(2)} h^*_{(2)}) \triangleright z) \otimes g_{(3)} h^*_{(3)} k \\ &= x \cdot \langle (S(g_{(1)})^* S^{-1}(h_{(1)})) \triangleright y, (g_{(2)} h^*_{(2)}) \triangleright z \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} \otimes g_{(3)} h^*_{(3)} k \\ &= (x \otimes g) \cdot \left( \langle S^{-1}(h_{(1)}) \triangleright y, h^*_{(2)} \triangleright z \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} \otimes h^*_{(3)} k \right) \\ &= (x \otimes g) \cdot (h^*_{(1)} \triangleright \langle y, z \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon} \otimes h^*_{(2)} k) \\ &= (x \otimes g) \cdot \langle y \otimes h, z \otimes k \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\varepsilon \otimes H}. \end{aligned}$$

Der Ausartungsraum der beiden inneren Produkte auf  ${}_{\mathcal{B} \rtimes H}\mathcal{E} \otimes H_{\mathcal{A} \rtimes H}$  ist der gleiche, daher kann man auf eindeutige Weise  $\mathcal{E} \rtimes H$  definieren. Falls  $\mathcal{B} \cdot \mathcal{E} = {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{A}$ , so ist auch  $\mathcal{E} \rtimes H$  stark nichtausgeartet für beide Modulstrukturen. Aus der Vollheit der inneren Produkte von  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  folgt automatisch die Vollheit der inneren Produkte auf  ${}_{\mathcal{B} \rtimes H}\mathcal{E} \rtimes H_{\mathcal{A} \rtimes H}$ : Sei  $a = \sum_i \langle x_i, y_i \rangle_{\mathcal{A}}^{\varepsilon}$ , dann ist offensichtlich

$$a \otimes h = \sum_i \langle x_i \otimes 1_H, y_i \otimes h \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\varepsilon \otimes H},$$

wodurch wir die Vollheit von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A} \rtimes H}^{\mathcal{E} \rtimes H}$  gezeigt haben. Analog zeigt man die Vollheit von  ${}_{\mathcal{B} \rtimes H} \langle \cdot, \cdot \rangle^{\mathcal{E} \rtimes H}$ . Damit wird  ${}_{\mathcal{B} \rtimes H} \mathcal{E} \rtimes H_{\mathcal{A} \rtimes H}$  zu einem \*-MORITA-Äquivalenzbimodul. Da die vollständige Positivität der inneren Produkte durch die Konstruktion der Cross-Produktalgebra erhalten bleibt folgt, daß  ${}_{\mathcal{B} \rtimes H} \mathcal{E} \rtimes H_{\mathcal{A} \rtimes H}$  ein starker MORITA-Äquivalenzbimodul ist, wenn es  ${}_B \mathcal{E}_A$  war.  $\square$

Wenden wir nun Lemma 2.1.9 auf Äquivalenzbimoduln an, so erhalten wir das folgende Korollar.

**Korollar 2.2.2.**

Seien  ${}_B \mathcal{E}_A$  und  ${}_B \mathcal{F}_A$  isomorphe,  $H$ -äquivalente (\*-, starke) MORITA-Äquivalenzbimoduln, und  $T : {}_B \mathcal{E}_A \rightarrow {}_B \mathcal{F}_A$  ein Isomorphismus, dann ist die Abbildung

$$T \otimes \text{id}_H : {}_{\mathcal{B} \rtimes H} \mathcal{E} \rtimes H_{\mathcal{A} \rtimes H} \rightarrow {}_{\mathcal{B} \rtimes H} \mathcal{F} \rtimes H_{\mathcal{A} \rtimes H} \quad (2.2.1)$$

ein Isomorphismus von (\*-, starken) MORITA-Äquivalenzbimoduln.

**Lemma 2.2.3.**

Die Abbildung

$$I_3 : {}_A \mathcal{A}_A \rtimes H \ni x \otimes h \mapsto x \otimes h \in {}_{A \rtimes H} \mathcal{A} \rtimes H_{A \rtimes H} \quad (2.2.2)$$

ist ein Isomorphismus zwischen starken MORITA-Äquivalenzbimoduln.

*Beweis.* Da wir davon ausgehen, daß  $\mathcal{A} \rtimes H$  nichtausgeartet ist, sind die inneren Produkte ohne Quotientenbildung nichtausgeartet. Es ist leicht zu zeigen, daß die Bimodulstrukturen sowie die inneren Produkte auf  $\mathcal{A} \otimes H$  in beiden Interpretationen zusammenfallen.  $\square$

Wir sind nun in der Lage folgendes wichtiges Ergebnis zu formulieren.

**Satz 2.2.4** (Cross-Produkt induziert Gruppoidmorphismus).

Die durch die HOPF-\*-Algebra  $H$  erhaltenen Cross-Produkte induzieren die Gruppoidmorphismen

$$\cdot \rtimes H : \text{Pic}_H^* \rightarrow \text{Pic}^* \quad (2.2.3)$$

und

$$\cdot \rtimes H : \text{Pic}_H^{\text{str}} \rightarrow \text{Pic}^{\text{str}}. \quad (2.2.4)$$

Dabei werden die Einselemente  ${}_A \mathcal{A}_A \in \text{Obj}(\text{Pic}_H^*)$  auf die Cross-Produktalgebren  $\mathcal{A} \rtimes H$  abgebildet und Pfeile  $[{}_B \mathcal{E}_A] \in \text{Morph}(\text{Pic}_H^*)$  auf die Pfeile  $[{}_{\mathcal{B} \rtimes H} \mathcal{E} \rtimes H_{\mathcal{A} \rtimes H}] \in \text{Pic}^*(\mathcal{B} \rtimes H, \mathcal{A} \rtimes H)$ . Analoges gilt für den starken Fall.

*Beweis.* Der Beweis ist eine Folge der zuvor gezeigten Lemmata. Aufgrund des Korollars 2.2.2 ist  $\cdot \rtimes H$  auf den Isomorphieklassen wohldefiniert. Die Abbildung  $I_3$  aus Lemma 2.2.3 garantiert, daß Einselemente auf Einselemente abgebildet werden. Desweiteren sichert eine Erweiterung von Proposition 2.1.11, daß Tensorprodukte auf Tensorprodukte abgebildet werden – inklusive der dadurch induzierten inneren Produkte. Im Fall von Äquivalenzbimoduln legt ein inneres Produkt das andere aufgrund der Kompatibilität fest. Weiter stellt  $I_2$  aus Proposition 2.1.11 sicher, daß konjugiert komplexe Bimoduln auf konjugiert komplexe Bimoduln abgebildet werden. Demnach werden Produkte und Inverse aus  $\text{Pic}_H^*$  auf Produkte und Inverse in  $\text{Pic}^*$  abgebildet und analog für  $\text{Pic}_H^{\text{str}}$  nach  $\text{Pic}^{\text{str}}$ .  $\square$

Aus dem Satz ergeben sich nun zwei einfache Korollare.

**Korollar 2.2.5** (MORITA-Äquivalenz von Cross-Produktalgebren).

Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zwei  $H$ -äquivalente stark MORITA-äquivalente Algebren, dann sind  $\mathcal{A} \rtimes H$  und  $\mathcal{B} \rtimes H$  stark MORITA-äquivalente Cross-Produktalgebren. Analoges gilt, wenn man stark durch  $*$ - ersetzt.

**Korollar 2.2.6** (Gruppenhomomorphismus).

Die Abbildungen

$$\text{Pic}_H^*(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Pic}^*(\mathcal{A} \rtimes H) \quad \text{und} \quad \text{Pic}_H^{\text{str}}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Pic}^{\text{str}}(\mathcal{A} \rtimes H) \quad (2.2.5)$$

sind Gruppenhomomorphismen.

## 2.3 Das Beispiel $\text{Pic}_H^{\text{str}}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Pic}^{\text{str}}(H)$

Wir wollen die in diesem Kapitel erarbeiteten Techniken an dem einfachen, jedoch interessanten Beispiel  $\text{Pic}_H^{\text{str}}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Pic}^{\text{str}}(H)$  veranschaulichen. Das heißt  $\mathcal{A} = \mathbb{C}$  ausgestattet mit der trivialen Wirkung der HOPF- $*$ -Algebra  $H$ . In diesem Fall vereinfacht sich die Cross-Produktalgebra, da  $\mathbb{C} \rtimes H = H$  ist.

**Lemma 2.3.1.**

Sei nun  $\chi \in \text{GL}(H, \mathbb{C})$ , dann gilt

- i.)  $\chi^{-1}(h) = \chi(S^{-1}(h)) = \chi(S(h))$ .
- ii.)  $\chi \in \text{U}(H, \mathbb{C})$  genau dann wenn  $\chi(h^*) = \overline{\chi(h)}$ .
- iii.) Die Abbildung  $\Phi^\chi(h) := \chi(S(h_{(1)}))h_{(2)}$  definiert einen Automorphismus  $\Phi^\chi \in \text{Aut}(H)$  und  $\Phi^\chi \in \text{Aut}^*(H)$  falls  $\chi \in \text{U}(H, \mathbb{C})$ .
- iv.) Die Abbildung

$$\text{GL}(H, \mathbb{C}) \ni \chi \mapsto \Phi^\chi \in \text{Aut}(H) \quad (2.3.1)$$

ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

- v.) Die Abbildung  $\Phi^\chi$  ist genau dann ein innerer Automorphismus, wenn  $\chi = \text{id}$  ist.

*Beweis.* Offensichtlich ist  $\chi^{-1}(h) = \chi(S^{-1}(h))$  durch Gleichung (A.2.22) wohldefiniert, wenn die Wirkung trivial ist. Desweiteren definiert  $\chi(S(h))$  ein Inverses bezüglich des Konvolutionsprodukts und aufgrund der Eindeutigkeit ist  $\chi(S(h)) = \chi^{-1}(h)$ . Den zweiten Teil zeigen wir, indem wir  $\bar{\chi}(h) := \overline{\chi(h^*)}$  definieren. Nutzen wir iv.) und die Unitaritätsbedingung (vgl. Definition A.2.33 iv.) für  $\chi$ , dann sehen wir, daß  $\bar{\chi}$  ein Inverses zu  $\chi^{-1}$  bezüglich des Konvolutionsprodukts ist und damit gleich  $\chi$  sein muß. Die umgekehrte Richtung ist trivial. Für Teil iii.) und iv.) zeigen wir schnell, daß  $\Phi^\chi$  ein Homomorphismus ist, d. h. es gilt  $\Phi^\chi = \text{id}$  und  $\Phi^\chi(gh) = \Phi^\chi(g)\Phi^\chi(h)$ . Da  $\chi \in \text{U}(H, \mathbb{C})$  ist  $\Phi^\chi(h^*) = \Phi^\chi(h)^*$ . Desweiteren rechnen wir nach, daß  $\Phi^\chi \circ \Phi^{\bar{\chi}} = \Phi^{\chi^* \bar{\chi}}$ , woraus die Bijektivität von  $\Phi^\chi$  folgt, und Gleichung (2.3.1) ist ein Gruppenhomomorphismus. Für die Injektivität sei  $\Phi^\chi(h) = h$ . Wendet man nun  $\varepsilon$  darauf an, so ergibt sich sofort  $\chi(S(h)) = \varepsilon(h)$  woraus  $\chi = \text{id}$  folgt.  $\square$

Lemma 2.3.1 ist eine Verallgemeinerung der bekannten Konstruktion von Automorphismen der Gruppenalgebra  $\mathbb{C}[G]$  aus den Charakteren der Gruppe  $G$ . Die Gruppe  $\text{U}(H, \mathbb{C})$  gibt immer einen

nichttrivialen Beitrag zur PICARD-Gruppe  $\text{Pic}^{\text{str}}(H)$ . So folgt aus [BURSZTYN & WALDMANN 2004, Gleichung (2.4)], daß es den injektiven Gruppenhomomorphismus gibt:

$$\mathcal{U}(H, \mathcal{C}) \ni \chi \mapsto \ell(\Phi^\chi) \in \text{Pic}^{\text{str}}(H). \quad (2.3.2)$$

Desweiteren ist klar, daß die Cross-Produktalgebra  $\mathcal{C} \rtimes H$  aufgrund der kanonischen Identifikation

$$\mathcal{C} \rtimes H \ni z \otimes h \mapsto zh \in H$$

nur die HOPF-Algebra selbst  $H$  ist. Der Gruppoidmorphismus  $\cdot \rtimes H$  liefert damit einen Gruppenhomomorphismus

$$\text{Pic}_H^{\text{str}}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Pic}^{\text{str}}(H). \quad (2.3.3)$$

Da das Zentrum von  $\mathcal{C}$  trivial ist, gilt  $\mathcal{U}(H, \mathcal{C}) = \mathcal{U}_0(H, \mathcal{C})$  (Vergleiche hierzu Bemerkung A.2.39) und ferner ist  $\mathcal{U}_0(H, \mathcal{C})$  eine Untergruppe von  $\text{Pic}_H^{\text{str}}(\mathcal{C})$ , so daß wir folgende Proposition formulieren können.

**Proposition 2.3.2.**

*Das folgende Diagramm von Gruppenhomomorphismen kommutiert*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(H, \mathcal{C}) & \hookrightarrow & \text{Pic}_H^{\text{str}}(\mathcal{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \cdot \rtimes H \\ \text{Aut}^*(H) & \xrightarrow{\ell} & \text{Pic}^{\text{str}}(H) \end{array} \quad (2.3.4)$$

wobei  $\mathcal{U}(H, \mathcal{C})$  als Untergruppe von  $\text{Pic}^{\text{str}}(H)$  verstanden wird.

*Beweis.* Sei nun  $\chi \in \mathcal{U}(H, \mathcal{C}) = \mathcal{U}_0(H, \mathcal{C})$ . Das Bild von  $\chi$  in  $\text{Pic}_H^{\text{str}}(\mathcal{C})$  ist gegeben durch die Isomorphieklassen der trivialen Bimoduln  $\mathcal{C}$  mit den kanonischen inneren Produkten und  $H$ -Wirkungen  $h \triangleright^\chi z = \chi(h_{(1)})h_{(2)} \triangleright z = \chi(h)z$ . Wir bezeichnen diesen Bimodul mit  $\mathcal{C}^\chi$ . Dann bilden wir  $[\mathcal{C}^\chi]$  auf  $[\mathcal{C}^\chi \rtimes H]$  ab, wobei  $\mathcal{C}^\chi \rtimes H \cong H$  als  $\mathcal{C}$ -Modul. Die  $H$ -Modulstruktur ist gegeben durch  $g \cdot h = \chi(g_{(1)})g_{(2)}h = \Phi^{\chi^{-1}}(g)h = g \cdot_{\Phi^\chi} h$ , und die kanonische  $H$ -Rechtsmodulstruktur. Das linkslineare innere Produkt ist gegeben durch  $\Phi^\chi(gh^*)$ , das rechtslineare ist das kanonische. Damit ist  $\mathcal{C}^\chi \rtimes H$  isomorph zu  $_{\Phi^\chi(H)}H_H$ , dessen Klasse in  $\text{Pic}^{\text{str}}(H)$  ist nun  $\ell(\Phi^\chi)$ . Damit ist die Kommutativität von Diagramm (2.3.4) gezeigt.  $\square$

Sei nun  $\mathcal{C}$  ein algebraisch abgeschlossener Körper, was genau dann der Fall ist, wenn  $\mathbb{R}$  ein reell abgeschlossener Körper ist [JACOBSON 1985, Section 5.1], so können wir das Diagramm (2.3.4) genauer untersuchen.

**Korollar 2.3.3.**

*Sei  $\mathcal{C}$  ein algebraisch abgeschlossener Körper, dann ist*

- i.)  $\text{Pic}^{\text{str}}(\mathcal{C}) = \{\text{id}\}$ ,
- ii.)  $\text{Pic}_H^{\text{str}}(\mathcal{C}) = \mathcal{U}(H, \mathcal{C}) = \mathcal{U}_0(H, \mathcal{C})$ ,
- iii.) die Abbildung  $\text{Pic}_H^{\text{str}}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Pic}^{\text{str}}(H)$  injektiv und ihr Bild ist durch das Diagramm (2.3.4) gegeben.

---

*Beweis.* Der einzige Äquivalenzbimodul bis auf Isomorphie ist der eindimensionale Vektorraum  $\mathbb{C}$  mit dem kanonischen, positiv definiten inneren Produkt  $\langle z, w \rangle_{\mathbb{C}} = \bar{z}w$ . In diesem Fall ist  $\mathrm{Pic}^*(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}_2$ . Der zweite Teil folgt unmittelbar aus Proposition ?? . Der dritte Teil ist eine Folge aus Proposition 2.3.2.  $\square$



# Kapitel 3

## Sternprodukte

### 3.1 Das Quantisierungsproblem

In diesem Abschnitt soll eine kurze Einführung in das Problem des Quantisierens gegeben werden. Eine sehr ausführliche Beschreibung findet sich in [WALDMANN 2004b]. Unter Quantisieren verstehen wir den Prozeß von einer gegebenen klassischen Mechanik auf eine Quantenmechanik zu schließen. Dieses Unterfangen erweist sich im allgemeinen als beliebig schwierig und keineswegs eindeutig. Während die Konzepte (und deren Formulierung) in der klassischen Mechanik klar sind und prinzipiell keine Probleme bereiten, stellt es sich als äußerst schwierig – wenn nicht sogar als unmöglich – heraus, eine *a priori-Quantenmechanik* zu formulieren. Eine Ausnahme bildet hier die *axiomatische Quantenfeldtheorie* [HAAG & KASTLER 1964; STREATER & WIGHTMAN 2000], mit der man bisher allerdings kein Beispiel außer dem freien Teilchen beschreiben kann. Daher versucht man ausgehend von einem bekannten klassischen System eine Quantisierung anzugeben. Leider existiert kein „Quantisierungsfunktor“, mit dessen Hilfe man zu der klassischen Beschreibung eines physikalischen Systems eine *eindeutige* quantenmechanische angeben könnte.

Man beachte, daß die Quantisierung deshalb notwendig ist, weil die klassische Beschreibung diverser Phänomene in der Physik nur unzureichend ist. Quantisierung ist somit kein Prozeß, den man dem System aufzwingt, sondern die zu beschreibenden Phänomene sind bereits quantenmechanischer Natur, und es ist die klassische Beschreibung, die mangelhaft ist. Dies bedeutet allerdings nicht, daß die klassische Mechanik keine Berechtigung hat, vielmehr ist es davon abhängig auf welcher Skala wir messen. Möchten wir die Bewegung eines Planeten um die Sonne beschreiben oder die Bewegung eines Elektrons um einen Atomkern, so haben wir es (im wesentlichen) in beiden Fällen mit einer Zentralkraft (dem KEPLER-Problem) zu tun, und die Probleme scheinen ähnlicher Natur zu sein. Im Falle der Planeten liefert uns die klassische Mechanik, d. h. die NEWTONsche Mechanik sowie die (Allgemeine) Relativitätstheorie ein korrektes Ergebnis, das mit all unseren Messungen (im Rahmen der verfügbaren Meßgenauigkeit) übereinstimmt, so daß wir nie auf die Idee kämen, das Modell anzuzweifeln. Die klassische Mechanik ist in der Astrophysik eine sehr gute Näherung. Im Falle des Atomkerns hingegen versagt die klassische Theorie, und wir brauchen eine andere (wie sich herausstellen wird allgemeinere) Beschreibung, um z. B. das Energiespektrum eines Wasserstoffatoms zu bestimmen. Hier spielt die Naturkonstante  $\hbar$ , das PLANCKsche Wirkungsquantum, eine wichtige Rolle. Es hat die Einheit einer *Wirkung* und während im ersten Beispiel  $\hbar$  verschwin-

dend klein im Vergleich zur Wirkung der Planeten ist, macht sich die quantenmechanische Natur im zweiten Beispiel deutlich bemerkbar.

Wir wollen somit eine quantenmechanische Theorie haben, die eine Verallgemeinerung der klassischen Theorie darstellt. Daraus resultiert die Forderung, daß man von jeder quantenmechanischen Theorie auf eine eindeutige Weise zurück zu einer klassischen Theorie kommen muß, d. h. den *klassischen Limes* „ $\hbar \rightarrow 0$ “ bilden können muß. In der Physik bezeichnet man diesen Prozeß auch als *Quantenkorrekturen vernachlässigen*. Diese Sprechweise ist jedoch mißverständlich, da sie aus den obigen Gründen ein falsches Bild von der Physik vermittelt.

Was es letztendlich bedeutet, von der quantenmechanischen Beschreibung zur klassischen zu gelangen, ist im Rahmen der kanonischen Quantisierung ein nichttrivialer Prozeß und daher mit Vorsicht zu behandeln. Im Rahmen der Deformationsquantisierung soll motiviert werden wie dieser Grenzübergang zu verstehen ist.

## 3.2 Kanonische Quantisierung (auf dem $\mathbb{R}^{2n}$ )

### 3.2.1 Axiomatische Betrachtung einer Quantenmechanik

Es liegt nahe, uns die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der (nichtrelativistischen) klassischen HAMILTONschen Mechanik und der Quantenmechanik nach den Ideen von HEISENBERG vor Augen zu führen.

Das zentrale Objekt bei unserer Betrachtung wird die *Observable* sein. Eine Observable ist eine durch physikalische Experimente meßbare Kenngröße, wie zum Beispiel Ort, Energie, Impuls oder Drehimpuls. In der klassischen Theorie ist die *Observablenalgebra* eine assoziative POISSON- $*$ -Algebra  $\mathcal{A}_{\text{cl}} \subseteq C^\infty(M)$ , wobei  $(M, \Lambda)$  eine POISSON-Mannigfaltigkeit ist. Die Motivation, eine POISSON-Mannigfaltigkeit zu betrachten, liegt darin begründet, daß die einzige „überlebende“ Struktur die POISSON-Klammer sein wird. Durch die Wahl der glatten Funktionen auf der POISSON-Mannigfaltigkeit wählen wir zum einen eine möglichst „angenehme“ Funktionenklasse, zum anderen ist jedes reale physikalische System beliebig gut durch glatte Funktionen zu approximieren.

Die *reinen Zustände* sind Punkte im Phasenraum  $M$ , die *gemischten Zustände* positive BOREL-Maße  $\mu$  auf  $M$ . Ein Erwartungswert ist die Integrationen eines Elementes  $f \in \mathcal{A}_{\text{cl}}$  über das BOREL-Maß. Die Zeitentwicklung einer Observablen  $f$  ist durch die HAMILTON-Funktion  $H$  gegeben und stellt sich infinitesimal dar als

$$\frac{d}{dt}f(t) = \{f(t), H\}. \quad (3.2.1)$$

Dem gegenüber steht die *Quantenmechanik*. Die Observablenalgebra  $\mathcal{A}_{\text{QM}}$  ist eine im allgemeinen nichtkommutative, assoziative  $*$ -Unteralgebra von (beschränkten sowie unbeschränkten) Operatoren auf  $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{H}$ , wobei  $\mathfrak{H}$  ein HILBERT-Raum ist und  $\mathfrak{D}$  ein gemeinsamer, dichter Definitionsbereich. Die Nichtkommutativität spiegelt sich insbesondere in der HEISENBERGSchen Unschärferelation wider

$$[P_j, Q^i] = -i\hbar\delta_j^i \text{id}_{\mathfrak{H}}. \quad (3.2.2)$$



Die reinen Zustände werden durch Äquivalenzklassen von (nichtverschwindenden) Vektoren  $\psi \in \mathfrak{D}$  beschrieben. Dabei sind zwei Vektoren genau dann äquivalent, wenn sie auf dem gleichen Strahl liegen, d. h.  $\psi \sim \psi' \Leftrightarrow \psi = c\psi'$  mit  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Somit sind reine Zustände eine Untermenge des projektiven HILBERT-Raums  $\mathbb{P}\mathfrak{H}$ . Man beachte, daß in der Natur nicht alle denkbaren Zustände realisiert werden, da die Vektoren, die den Strahl  $[\psi] \in \mathbb{P}\mathfrak{H}$  repräsentieren, im Definitionsbereich  $\mathfrak{D}$  aller physikalisch relevanten Observablen liegen müssen. Die gemischten Zustände werden durch Dichtematrizen  $\varrho$  realisiert. Der Erwartungswert eines Operators  $A \in \mathcal{A}_{\text{QM}}$  ist definiert als  $\text{tr}(\varrho A)$ , der Spur über die Dichtematrix multipliziert mit  $A$ . Sowohl klassisch wie quantenmechanisch fordern wir von einer Observablen, daß sie ein reelles Spektrum besitzt. Daher beschränken wir uns in der klassischen Mechanik auf reelle Observablen  $f = \overline{f}$  und in der quantenmechanischen Beschreibung auf selbstadjungierte Operatoren  $A = A^*$ . Äquivalent könnten wir Observable auch mittels *normaler* Operatoren beschreiben, da wir durch Linearkombination aus zwei normalen Operatoren einen selbstadjungierten gewinnen können und auf die gleiche Art wieder zurückkommen.

Die Zeitentwicklung einer Observablen ist durch den *Kommutator* mit dem HAMILTON-Operator  $H$  gegeben

$$\frac{d}{dt}A(t) = \frac{1}{i\hbar}[A(t), H]. \quad (3.2.3)$$

Da Symmetrien im weiteren dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielen werden, sei erwähnt, daß diese in der klassischen Mechanik mittels einer LIE-Algebrawirkung von  $\mathfrak{g}$  durch Derivationen oder LIE-Gruppenwirkung durch Algebraautomorphismen auf von  $G$  auf  $M$  realisiert werden, in der Quantenmechanik mittels  $\mathfrak{g}$ - bzw.  $G$ -Darstellungen auf dem HILBERT-Raum  $\mathfrak{H}$ .

### 3.2.2 Umsetzung der kanonischen Quantisierung im flachen Phasenraum

Wie bereits erwähnt, wollen wir uns insbesondere mit der Observablenalgebra auseinandersetzen und funktional-analytische Aspekte vorerst außer acht lassen. Eine offensichtliche Frage ist, wie die Umsetzung der Gleichung (3.2.2), der HEISENBERGSchen Unschärferelation, geschieht. Dies wollen wir für den einfachsten und sehr gut verstandenen Fall diskutieren.

Dazu betrachten wir ein physikalisches System, dessen Phasenraum der  $\mathbb{R}^{2n} \cong T^*\mathbb{R}^n$  mit der kanonischen symplektischen Form  $\omega_0 = -\sum_i dp^i \wedge dq_i$  und der daraus resultierenden POISSON-Klammer ist.

Die kanonische Quantisierung geschieht, indem wir den Koordinatenfunktionen Differentialoperatoren auf dem Prä-HILBERT-Raum  $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  zuordnen. Dieser sind die Funktionen mit kompaktem Träger auf  $\mathbb{R}^n$  mit dem HERMITESche Produkt, dem  $L^2$ -Skalarprodukt bezüglich des LEBESGUE-Maßes, das wie folgt gegeben ist:

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\phi(q)} \psi(q) \, d^n q. \quad (3.2.4)$$

Sei nun  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , dann definieren wir folgende Abbildungen

$$\begin{aligned} q^i &\mapsto Q^i : \psi \mapsto (q \mapsto (Q^i \psi)(q) = q^i \psi(q)), \\ p_i &\mapsto P_i : \psi \mapsto \left( q \mapsto (P_i \psi)(q) = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \right) \psi(q) \right). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Mit dieser Zuordnung werden wir Gleichung (3.2.2) gerecht. Allerdings sieht man an dieser Stelle zweierlei. Zum einen ist aufgrund der Nichtkommutativität der Operatoralgebra keine eindeutige Zuordnung von polynomialen Funktionen von der klassischen Seite auf Operatoren möglich. Dies liefert uns später den Begriff der *Ordnungsvorschrift*. Zum anderen sehen wir bereits, daß die Definition eines klassischen Limes „ $\hbar \rightarrow 0$ “ auf der Operatoralgebra zu naiv wäre, da jeder Impulsoperator auf die Null abgebildet würde.

Die in Gleichung (3.2.5) definierten Operatoren sind symmetrisch bezüglich des Skalarproduktes in Gleichung (3.2.4), d. h.  $\langle \phi, Q^i \psi \rangle = \langle Q^i \phi, \psi \rangle$  und  $\langle \phi, P_j \psi \rangle = \langle P_j \phi, \psi \rangle$ , ferner bilden sie  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  auf sich selbst ab.

### WEYL-, (Anti-)Standard- und $\kappa$ -Ordnung

Nun möchten wir nicht nur eine Zuordnung für die Koordinatenfunktionen haben, sondern für alle Polynome auf dem  $\mathbb{R}^{2n}$ , die wir mit  $\text{Pol}(\mathbb{R}^{2n})$  bezeichnen. Da die Differentialoperatoren auf dem Prä-HILBERT-Raum nicht kommutieren, müssen wir zusätzlich eine *Ordnungsvorschrift* angeben. Es ist beispielsweise völlig unklar, welcher Operator dem Produkt  $q^i p_j$  entspricht, schließlich wären alle Linearkombinationen  $\tau P_j Q^i + (1 - \tau) Q^i P_j$  mit  $\tau \in \mathbb{R}$  denkbar. Im folgenden werden wir eine sehr einfache Ordnungsvorschrift angeben, die *Standardordnung*, und aus dieser weitere entwickeln, sowie erste *Sternprodukte* erhalten. Bei der Standardordnung schreiben wir die Impulsoperatoren nach rechts, d. h. wir definieren für Polynome die  $\mathbb{C}$ -lineare und injektive Abbildung  $\varrho_{\text{Std}}$ , bei der wir zuerst alle Impulse nach rechts schreiben und dann gemäß Gleichung (3.2.5) ersetzen. Im weiteren sei  $\text{DiffOp}(\mathbb{R}^n)$  die *Algebra der Differentialoperatoren mit glatten Koeffizientenfunktionen* auf  $\mathbb{R}^n$  und  $\text{DiffOpPol}(\mathbb{R}^n)$  sei die *Algebra der Differentialoperatoren mit polynomialen Koeffizientenfunktionen* auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Definiton und Lemma 3.2.1** (Die Standardordnung  $\varrho_{\text{Std}}$  und die Symbolabbildung  $\sigma_{\text{Std}}$ ).

Die Standardordnung ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{Std}} : \text{Pol}(\mathbb{R}^{2n}) &\rightarrow \text{DiffOp}(\mathbb{R}^n), \\ q^{i_1} \cdots q^{i_r} p_{i_1} \cdots p_{i_s} &\mapsto \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n q^{i_1} \cdots q^{i_r} \frac{\partial^n}{\partial q^{i_1} \cdots \partial q^{i_s}} \quad \text{und} \quad 1 \mapsto 1. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Die Umkehrabbildung  $\sigma_{\text{Std}}$  ist gegeben durch

$$\sigma_{\text{Std}} : \text{DiffOpPol}(\mathbb{R}^n) \ni D \mapsto e^{-\frac{i}{\hbar} p q} D \left( e^{\frac{i}{\hbar} p q} \right) \in \text{Pol}(\mathbb{R}^{2n}), \quad (3.2.7)$$

und wird als standardgeordnete Symbolabbildung bezeichnet.

Wir können nun für eine Funktion  $f \in \text{Pol}(\mathbb{R}^{2n}) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  schreiben

$$\varrho_{\text{Std}}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \sum_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial^n f}{\partial p_1 \cdots \partial p_n} \Big|_{p=0} \frac{\partial^n}{\partial q^{i_1} \cdots \partial q^{i_n}}. \quad (3.2.8)$$

Da wir uns bisher auf  $\text{Pol}(\mathbb{R}^{2n})$  beschränkt haben, liefert die Summe in Gleichung (3.2.8) nur endlich viele Terme. Fassen wir den  $\mathbb{R}^{2n}$  als Kotangentenbündel  $T^*\mathbb{R}^n$  des Konfigurationsraums  $\mathbb{R}^n$  auf, so bricht die Reihe auch dann ab, wenn wir uns auf Polynome in den Impulsen beschränken

und *glatte* Funktionen auf der Basis  $\mathbb{R}^n$ , d. h. in den Orten zulassen. Man kann leicht zeigen, daß  $\varrho_{\text{Std}} \circ \sigma_{\text{Std}} = \text{id}_{\text{DiffOp}(\mathbb{R}^n)}$  und  $\sigma_{\text{Std}} \circ \varrho_{\text{Std}} = \text{id}_{\text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n)}$  ist. Dabei bezeichnet  $\text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n)$  die in den Impulsen polynomialen Funktionen und wir hätten gezeigt, daß  $\varrho_{\text{Std}}$  eine Bijektion ist.

Die Standardordnung erweist sich physikalisch als nicht sehr befriedigend, da reelle Polynome, d. h. observable Größen, im allgemeinen nicht auf symmetrische Operatoren abgebildet werden. Daher wollen wir weitere Ordnungsvorschriften angeben, unter anderem auch eine, bei der ebendies der Fall sein wird.

Der bijektive NEUMAIER-Operator  $N_\kappa$ , der im allgemeinen für beliebige Kotangentenbündel  $T^*Q$  definiert ist [NEUMAIER 2001], stellt sich als sehr nützlich heraus. Mit seiner Hilfe werden wir Ordnungen parametrisieren und so eine Familie von Ordnungen angeben können. Da wir im weiteren noch des öfteren auf den Operator zurückgreifen werden, seien im folgenden einige Eigenschaften zusammengetragen.

**Definiton und Lemma 3.2.2** (NEUMAIER-Operator für  $T^*\mathbb{R}^n$ ).

Der NEUMAIER-Operator  $N_\kappa : \text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n)$  mit

$$N_\kappa = e^{-i\hbar\kappa\Delta} \quad \text{und} \quad \Delta = \sum_k \frac{\partial^2}{\partial q^k \partial p_k} \quad (3.2.9)$$

ist für alle  $\kappa \in \mathbb{R}$  eine lineare, bijektive Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

- i.)  $N_\kappa^{-1} = N_{-\kappa}$  (Inverses),
- ii.)  $(N_\kappa)^\alpha = N_{\alpha\kappa}$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  insbesondere ist  $N_0 = \text{id}$ ,
- iii.)  $N_\kappa N_{\kappa'} = N_{\kappa+\kappa'}$ ,
- iv.)  $\overline{N_\kappa f} = N_{-\kappa} \overline{f}$  für alle  $f \in \text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n)$ .

Nun kann man ausgehend von der Standardordnung eine Familie von Ordnungsvorschriften, die  $\kappa$ -Ordnungen, angeben.

**Definition 3.2.3** (Die  $\kappa$ -Ordnungsvorschrift).

Sei  $\varrho_{\text{Std}} : \text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{DiffOp}(\mathbb{R}^n)$  die Standardordnungsvorschrift und  $N_\kappa$  der NEUMAIER-Operator für  $T^*\mathbb{R}^n$ . Man definiert die  $\kappa$ -Ordnung mittels

$$\varrho_\kappa := \varrho_{\text{Std}} \circ N_\kappa : \text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{DiffOp}(\mathbb{R}^n). \quad (3.2.10)$$

Desweiteren nennen wir

$$\varrho_{\text{Weyl}} := \varrho_{1/2} = \varrho_{\text{Std}} \circ N_{1/2} \quad (3.2.11)$$

die WEYL-Ordnung.

Offensichtlich ist  $\varrho_0 = \varrho_{\text{Std}}$  und für alle  $\kappa$ -Ordnungen gilt  $\varrho_\kappa(p_i) = P_i$  und  $\varrho_\kappa(q^i) = Q^i$ . Die WEYL-Ordnung wird sich als besonders wichtig herausstellen, da diese reelle Funktionen auf symmetrische Operatoren abbildet. Wir rechnen dazu für den adjungierten Operator zu  $\varrho_{\text{Std}}$  nach

$$\varrho_{\text{Std}}(f)^\dagger = \varrho_{\text{Std}}(N_{1/2}^2 \overline{f}), \quad (3.2.12)$$

der im allgemeinen von  $\varrho_{\text{Std}}(\overline{f})$  verschieden ist. Im Gegensatz dazu gilt für die WEYL-Ordnung

$$\varrho_{\text{Weyl}}(f)^\dagger = \varrho_{\text{Std}}(N_{1/2} f)^\dagger = \varrho_{\text{Std}}(N_{1/2}^2 \overline{N_{1/2} f}) = \varrho_{\text{Std}}(N_{1/2} \overline{f}) = \varrho_{\text{Weyl}}(\overline{f}). \quad (3.2.13)$$

Dazu haben wir ausgenutzt, daß  $\overline{N_{1/2}f} = N_{1/2}^{-1}\overline{f}$  ist. Ferner sind wir nun in der Lage, eine explizite Form für  $\varrho_{\text{Weyl}}$  anzugeben:

$$\varrho_{\text{Weyl}}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{\hbar}{i} \right)^n \sum_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial^n (N_{1/2}f)}{\partial p_1 \dots \partial p_n} \Big|_{p=0} \frac{\partial^n}{\partial q^{i_1} \dots \partial q^{i_n}}. \quad (3.2.14)$$

Dies entspricht der WEYLSchen Symmetrisierungsvorschrift, die einem Polynom in Orts- und Impulsvariablen  $q^k$  und  $p_i$  das vollständig symmetrisierte Polynom in den zugehörigen Operatoren  $Q^k$  und  $P_i$  zuordnet.

**Beispiel 3.2.4** (Standardordnung und WEYL-Ordnung).

Ein einfaches nichttriviales Beispiel ergibt sich für das Polynom  $q^2p$ .

$$\varrho_{\text{Weyl}}(q^2p) = \frac{1}{3}(Q^2P + QPQ + PQ^2) = -i\hbar q^2 \frac{\partial}{\partial q} - i\hbar q, \quad (3.2.15)$$

wohingegen wir in der Standardordnung

$$\varrho_{\text{Std}}(q^2p) = Q^2P = -i\hbar q^2 \frac{\partial}{\partial q} \quad (3.2.16)$$

erhalten.

### WICK- und $\tilde{\kappa}$ -Ordnung

Neben den bisher genannten Ordnungsvorschriften wollen wir noch die z. B. in der Quantenfeldtheorie wichtige WICK-Ordnung  $\varrho_{\text{Wick}}$ , sowie die verallgemeinerte  $\varrho_{\tilde{\kappa}}$ -Ordnung diskutieren. Wir fassen dazu den  $\mathbb{R}^{2n}$  als  $\mathbb{C}^n$  mit der kanonischen komplexen Struktur auf und führen komplexe Koordinaten

$$z^i = q^i + ip_i \quad \text{und} \quad \bar{z}^i = q^i - ip_i \quad (3.2.17)$$

ein, wobei darauf zu achten ist, daß man Orte und Impulse auf eine gemeinsame physikalische Einheit [Wirkung] $^{\frac{1}{2}}$  skalieren muß. Dies geschieht beispielsweise mit einer Massen- und einer Frequenzskala. Die Quantisierung wird wie folgt realisiert. Wir betrachten den HILBERT-Raum der quadratintegrierbaren Funktionen  $L^2(\mathbb{C}^n, d\mu)$ , wobei  $d\mu$  das GAUSS-Maß

$$d\mu(z, \bar{z}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} e^{-\frac{z\bar{z}}{2\hbar}} dz d\bar{z} \quad (3.2.18)$$

ist. Das zugehörige  $L^2$ -Skalarprodukt ist gegeben durch

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{C}^n} \overline{\phi(z, \bar{z})} \psi(z, \bar{z}) e^{-\frac{z\bar{z}}{2\hbar}} dz d\bar{z}. \quad (3.2.19)$$

Bemerkenswert ist, daß der Raum der quadratintegrierbaren, antiholomorphen Funktionen einen abgeschlossen Untervektorraum  $\mathfrak{H}$  von  $L^2(\mathbb{C}^n, d\mu)$  bildet, also selbst ein HILBERT-Raum ist. Die Vektoren

$$e_{k_1 \dots k_n}(\bar{z}) = (2\hbar)^{k_1 + \dots + k_n} (k_1! \dots k_n!)^{-\frac{1}{2}} (\bar{z}^1)^{k_1} \dots (\bar{z}^n)^{k_n} \quad (3.2.20)$$

bilden ein vollständiges Orthonormalsystem, d. h. eine HILBERT-Basis in  $\mathfrak{H}$ . Diesen Raum nennt man den BARGMANN-FOCK-Raum. Das Ziel ist nun eine Quantisierung für Polynome  $\text{Pol}(\mathbb{C}^n)$  durch Operatoren auf  $\mathfrak{H}$  anzugeben. Dabei bezeichnen wir mit  $\text{Pol}(\mathbb{C}^n)$  die Polynome in  $z$  und  $\bar{z}$  auf  $\mathbb{C}^n$ . Zu diesem Zweck definieren wir *Erzeuger* und *Vernichter* durch

$$a_i^\dagger = \bar{z}^i \quad \text{sowie} \quad a_j = 2\hbar \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} \quad (3.2.21)$$

für alle  $i, j = \{1, \dots, n\}$ . Auf einem geeigneten Definitionsbereich  $\mathfrak{D}$  ergibt sich

$$\langle \phi, a_k \psi \rangle = \langle a_k^\dagger \phi, \psi \rangle \quad \text{und} \quad [a_i, a_j^\dagger] = 2\hbar \delta_{ij} \text{id}_{\mathfrak{D}}. \quad (3.2.22)$$

Letztere Gleichung ist das Analogon zu Gleichung (3.2.2).

**Definition 3.2.5** (Die WICK-Ordnung).

Man definiert die WICK-Ordnung, indem man die Erzeuger nach links schreibt. Für Monome ergibt sich

$$\varrho_{\text{Wick}} : \text{Pol}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \text{DiffOp}(\mathbb{C}^n)$$

$$z^{i_1} \dots z^{i_r} \bar{z}^{j_1} \dots \bar{z}^{j_s} \mapsto a_{j_1}^\dagger \dots a_{j_s}^\dagger a_{i_1} \dots a_{i_r} = (2\hbar)^r \bar{z}^{j_1} \dots \bar{z}^{j_s} \frac{\partial^r}{\partial \bar{z}^{i_1} \dots \partial \bar{z}^{i_r}}. \quad (3.2.23)$$

Diese Abbildung kann man auf  $\text{Pol}(\mathbb{C}^n)$  fortsetzen und für alle  $f \in \text{Pol}(\mathbb{C}^n)$  gilt

$$\varrho_{\text{Wick}}(f) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(2\hbar)^r}{r!s!} \frac{\partial^{r+s} f}{\partial z^{i_1} \dots \partial z^{i_r} \partial \bar{z}^{j_1} \dots \partial \bar{z}^{j_s}}(0) \bar{z}^{j_1} \dots \bar{z}^{j_s} \frac{\partial^r}{\partial \bar{z}^{i_1} \dots \partial \bar{z}^{i_r}}. \quad (3.2.24)$$

Analog zu den  $\kappa$ -Ordnungen, bei denen wir ausgehend von  $\varrho_{\text{Std}}$  mittels  $N_\kappa$  zu  $\varrho_\kappa$  kamen, wollen wir auch hier einen Operator  $S_{\tilde{\kappa}}$  einführen, der uns verschiedene Ordnungen erzeugt:

$$S_{\tilde{\kappa}} = e^{2\hbar \tilde{\kappa} \tilde{\Delta}} \quad \text{mit} \quad \tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial z^k \partial \bar{z}^k}. \quad (3.2.25)$$

**Definition 3.2.6** (Die  $\tilde{\kappa}$ -Ordnung).

Die  $\tilde{\kappa}$ -Ordnung definiert man durch

$$\varrho_{\tilde{\kappa}} = \varrho_{\text{Wick}} \circ S_{1-\tilde{\kappa}} : \text{Pol}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \text{DiffOp}(\mathbb{C}^n), \quad (3.2.26)$$

so daß man für  $\tilde{\kappa} = 1$  die WICK-Ordnung erhält. Desweiteren liefert  $\tilde{\kappa} = 0$  eine WEYL-Ordnung in Erzeugern und Vernichtern und  $\tilde{\kappa} = -1$  nennt man Anti-WICK-Ordnung.

Die Operatoren  $\varrho_{\tilde{\kappa}}$  sind für alle  $f = \bar{f}$  symmetrisch, und allgemein gilt

$$\varrho_{\tilde{\kappa}}(f)^\dagger = \varrho_{\tilde{\kappa}}(\bar{f}). \quad (3.2.27)$$

Eine Motivation sowie ein ausführlicher Beweis findet sich in [WALDMANN 2004b].

### 3.3 Sternprodukte für $\mathbb{R}^{2n}$ und $\mathbb{C}^n$

Nach den Vorüberlegungen in Kapitel 3.2 ist der Weg zu *Sternprodukten* nicht mehr weit. Die Idee besteht darin, auf den Funktionen des Phasenraums ein assoziatives, nichtkommutatives Produkt einzuführen, bei dem der Kommutator in erster Ordnung das  $i\hbar$ -fache einer POISSON-Klammer ist. Die ersten Sternprodukte gehen auf MOYAL [1949] und BEREZIN [1975] zurück und wurden von BAYEN *et al.* [1977] systematisch betrachtet. Wir nutzen dazu die oben definierten Ordnungsvorschriften (3.2.8) sowie (3.2.11) bzw. (3.2.14) und ziehen das Operatorprodukt, mittels der Umkehrabbildungen von  $\varrho_{\text{Std}}$  und  $\varrho_{\text{Weyl}}$ , zweier glatter, in den Impulsen polynomialer Funktionen, wieder zurück auf die Funktionen auf dem Phasenraum.

#### 3.3.1 Standardprodukt, WEYL-Produkt und $\kappa$ -geordnete Produkte

Wir wollen nun explizite Formeln für das standardgeordnete Sternprodukt sowie das WEYL-Produkt für den  $\mathbb{R}^{2n}$  angeben.

$$\begin{aligned} f \star_{\text{Std}} g &:= \sigma_{\text{Std}}(\varrho_{\text{Std}}(f)\varrho_{\text{Std}}(g)) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^j \sum_{i_1, \dots, i_j} \frac{\partial^j f}{\partial p_{i_1} \dots \partial p_{i_j}} \frac{\partial^j g}{\partial q^{i_1} \dots \partial q^{i_j}}, \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

$$\begin{aligned} f \star_{\text{Weyl}} g &:= \sigma_{\text{Weyl}}(\varrho_{\text{Weyl}}(f)\varrho_{\text{Weyl}}(g)) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^r \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \sum_{i_1, \dots, i_r} \frac{\partial^r f}{\partial q^{i_1} \dots \partial q^{i_s} \partial p_{i_{s+1}} \dots \partial p_{i_r}} \frac{\partial^r g}{\partial p_{i_1} \dots \partial p_{i_s} \partial q^{i_{s+1}} \dots \partial q_{i_r}}. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Damit haben wir die ersten expliziten *Sternprodukte* für den flachen Phasenraum  $\mathbb{R}^{2n} \cong T^*\mathbb{R}^n$  konstruiert. Die so definierten Produkte  $\star_{\text{Weyl}}$  und  $\star_{\text{Std}}$  sind wohldefiniert, da  $\varrho_{\text{Weyl}}$  und  $\varrho_{\text{Std}}$  injektiv sind, und das Bild unter Operatorverknüpfung abgeschlossen ist. Die Assoziativität ist durch die Konstruktion klar. Der *Sternkommutator* zweier Funktionen zu einem Sternprodukt  $\star$  ist definiert durch

$$[f, g]_{\star} := f \star g - g \star f. \quad (3.3.3)$$

und für das standardgeordneten Produkt, als auch das WEYL-Produkt ergibt sich das  $i\hbar$ -fache der POISSON-Klammer plus Terme in höheren Ordnungen, die verschwinden, falls  $f$  und  $g$  linear in den Variablen sind:

$$f \star_{\text{Std}} g - g \star_{\text{Std}} f = i\hbar\{f, g\} + \mathcal{O}(\hbar^2) \quad \text{und} \quad f \star_{\text{Weyl}} g - g \star_{\text{Weyl}} f = i\hbar\{f, g\} + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (3.3.4)$$

Ferner ergibt sich für das WEYL-Produkt, daß die komplexe Konjugation ein antilinearer Antiautomorphismus des Sternproduktes  $\star_{\text{Weyl}}$  ist

$$\overline{f \star_{\text{Weyl}} g} = \overline{g} \star_{\text{Weyl}} \overline{f}. \quad (3.3.5)$$

Diese Eigenschaft bezeichnen wir als *HERMITEZITÄT des Sternproduktes*, und wir werden diese im folgenden explizit beweisen. Das standardgeordnete Sternprodukt erfüllt diese Eigenschaft erwartungsgemäß nicht. Wir werden nun einen recht eleganten Formalismus einführen und sehen, daß es kein anderes  $\kappa$ -geordnetes Produkt außer dem WEYL-Produkt gibt, das diese Eigenschaft besitzt. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} P, P^* : \text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n) \otimes \text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n) &\rightarrow \text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n) \otimes \text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n), \\ P &= \frac{\partial}{\partial q^k} \otimes \frac{\partial}{\partial p_k} \quad \text{und} \quad P^* = \frac{\partial}{\partial p_k} \otimes \frac{\partial}{\partial q^k}. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Ferner sei  $\mu$  die punktweise, kommutative Multiplikation von Funktionen, d. h.  $\mu(f \otimes g) = fg$  (vergleiche hierzu die Definition A.2.1). So schreibt sich das standardgeordnete Produkt als

$$f \star_{\text{Std}} g = \mu \circ e^{\frac{\hbar}{i} P^*} (f \otimes g), \quad (3.3.7)$$

und das WEYL-Produkt kann man in der Form

$$f \star_{\text{Weyl}} g = \mu \circ e^{\frac{\hbar}{2i} (P - P^*)} (f \otimes g) \quad (3.3.8)$$

angeben. Wir wollen nun eine explizite Formel für  $\kappa$ -geordnete Sternprodukte zeigen. Dazu benötigen wir jedoch vorher noch einige Identitäten.

**Lemma 3.3.1** (Zusammenhang  $\kappa$ -Ordnung und Standardordnung).

Für  $\kappa$ -geordnete Sternprodukte gilt

$$f \star_{\kappa} g = N_{\kappa}^{-1} (N_{\kappa} f \star_{\text{Std}} N_{\kappa} g). \quad (3.3.9)$$

*Beweis.* Wegen der Bijektivität von  $N_{\kappa}$  und der Tatsache, daß  $\varrho_{\kappa} = \varrho_{\text{Std}} \circ N_{\kappa}$  folgt

$$\begin{aligned} f \star_{\kappa} g &= \varrho_{\kappa}^{-1} (\varrho_{\kappa}(f) \varrho_{\kappa}(g)) \\ &= (\varrho_{\text{Std}} \circ N_{\kappa})^{-1} ((\varrho_{\text{Std}} \circ N_{\kappa})(f) (\varrho_{\text{Std}} \circ N_{\kappa})(g)) \\ &= N_{\kappa} \varrho_{\text{Std}}^{-1} (\varrho_{\text{Std}}(N_{\kappa} f) \varrho_{\text{Std}}(N_{\kappa} g)) \\ &= N_{\kappa}^{-1} (N_{\kappa} f \star_{\text{Std}} N_{\kappa} g). \end{aligned}$$

□

Dies bedeutet, daß wir mit Hilfe des NEUMAIER-Operators alle  $\kappa$ -Ordnungen aus der Standardordnung gewinnen können. Da der NEUMAIER-Operator  $N_{\kappa} = e^{-i\hbar\kappa\Delta}$  im wesentlichen ein exponenzierter LAPLACE-Operator ist, brauchen wir

$$\Delta \circ \mu = \mu \circ (\Delta \otimes \text{id} + P + P^* + \text{id} \otimes \Delta), \quad (3.3.10)$$

was direkt aus der Definition für Derivationen  $D$  folgt:  $D \circ \mu = (D \otimes \text{id} + \text{id} \otimes D)$ . Damit ist

$$N_{\kappa} \circ \mu = \mu \circ e^{-i\hbar\kappa(\Delta \otimes \text{id} + P + P^* + \text{id} \otimes \Delta)} \quad (3.3.11)$$

und wir können folgende Proposition formulieren.

**Proposition 3.3.2** (Explizite Formel für  $\kappa$ -geordnete Sternprodukte  $\star_\kappa$ ).

Seien  $f, g \in \text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n)$  und  $\kappa \in \mathbb{R}$ , dann ist das  $\kappa$ -geordnete Sternprodukt  $\star_\kappa$  durch

$$f \star_\kappa g = \mu \circ e^{i\hbar(\kappa P - (1-\kappa)P^*)}(f \otimes g) \quad (3.3.12)$$

gegeben. Man bezeichnet die Produkte für  $\kappa = 0$ ,  $\kappa = \frac{1}{2}$  und  $\kappa = 1$  als standardgeordnetes Sternprodukt, WEYL-Produkt und antistandardgeordnetes Sternprodukt.

**Lemma 3.3.3** (Komplexe Konjugation  $\kappa$ -geordneter Sternprodukte).

Für die komplexe Konjugation  $\kappa$ -geordneter Sternprodukte gilt

$$\overline{f \star_\kappa g} = \bar{g} \star_{1-\kappa} \bar{f}. \quad (3.3.13)$$

Insbesondere ist die komplexe Konjugation nur für  $\kappa = \frac{1}{2}$ , d. h. für das WEYL-Produkt, ein Antiautomorphismus.

*Beweis.* Um obiges Lemma zu zeigen, führen wir die Abbildung (komplexe Konjugation)  $C : \text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \bar{f} \in \text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n)$  ein, die offensichtlich mit dem Produkt  $\mu$  vertauscht, d. h.  $\mu \circ (C \otimes C) = C \circ \mu$ . Für den kanonischen Vertauschungsoperator (oder Flip)  $\tau : \text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n) \otimes \text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n) \ni f \otimes g \mapsto g \otimes f \in \text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n) \otimes \text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n)$  gilt  $\mu \circ \tau = \mu$ , da  $\mu$  kommutativ ist und  $\tau^2 = \text{id}$ . Wir können nun  $P$  mittels  $P^*$  ausdrücken und umgekehrt:

$$P^* = \tau \circ P \circ \tau \quad \text{und} \quad P = \tau \circ P^* \circ \tau.$$

Ferner gilt  $(C \otimes C) \circ P = P \circ (C \otimes C)$  und  $(C \otimes C) \circ P^* = P^* \circ (C \otimes C)$ , so daß wir nun zeigen können

$$\begin{aligned} \overline{(f \star_\kappa g)} &= C \circ \mu \circ e^{i\hbar(\kappa P - (1-\kappa)P^*)}(f \otimes g) \\ &= \mu \circ \tau \circ (C \otimes C) \circ e^{i\hbar(\kappa P - (1-\kappa)P^*)}(f \otimes g) \\ &= \mu \circ \tau \circ e^{-i\hbar(\kappa P + (1-\kappa)P^*)} \circ (C \otimes C)(f \otimes g) \\ &= \mu \circ e^{-i\hbar(\kappa P^* + (1-\kappa)P)} \circ \tau(\bar{f} \otimes \bar{g}) \\ &= \mu \circ e^{i\hbar((1-\kappa)P - (1-(1-\kappa))P^*)}(\bar{g} \otimes \bar{f}) \\ &= \bar{g} \star_{1-\kappa} \bar{f}. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

□

Zu guter Letzt wollen wir eine explizite Summenformel für die  $\kappa$ -geordneten Sternprodukte angeben, die sich zuweilen als äußerst nützlich erweist

$$f \star_\kappa g = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=0}^r \left( \frac{\hbar}{i} \right)^r \frac{(-\kappa)^j (1-\kappa)^{r-j}}{j!(r-j)!} \sum_{i_1, \dots, i_r} \frac{\partial^r f}{\partial q^{i_1} \dots \partial q^{i_j} \partial p_{i_{j+1}} \dots \partial p_{i_r}} \frac{\partial^r g}{\partial p_{i_1} \dots \partial p_{i_j} \partial q^{i_{j+1}} \dots \partial q^{i_r}}. \quad (3.3.15)$$

### 3.3.2 WICK-Produkt und $\tilde{\kappa}$ -geordnete Produkte

Aus der  $\tilde{\kappa}$ -Ordnung bekommen wir analog zu den  $\kappa$ -geordneten Sternprodukten ein zurückgezogenes Produkt. Dazu führen wir die Symbolabbildung  $\sigma_{\tilde{\kappa}}$  als Umkehrabbildung zu  $\varrho_{\tilde{\kappa}}$  ein, und wir können eine Formel für das  $\tilde{\kappa}$ -geordnete Produkt angeben.



**Definition 3.3.4** ( $\tilde{\kappa}$ -geordnetes Sternprodukt).

Das mittels

$$f \star_{\tilde{\kappa}} g = \sigma_{\tilde{\kappa}}(\varrho_{\tilde{\kappa}}(f) \circ \varrho_{\tilde{\kappa}}(g)) \quad (3.3.16)$$

definierte Produkt auf  $\text{Pol}(\mathbb{C}^n)$  mit  $\tilde{\kappa} \in \mathbb{R}$  heißt  $\tilde{\kappa}$ -geordnetes Sternprodukt. Die Produkte für  $\tilde{\kappa} = 1$  und  $\tilde{\kappa} = -1$  nennt man WICK-Produkt bzw. Anti-WICK-Produkt.

Wie bereits in Kapitel 3.3.1 wollen wir eine explizite und zudem elegantere Darstellung angeben. Dazu definieren wir

$$Z, \overline{Z} : \text{Pol}(\mathbb{C}^n) \otimes \text{Pol}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \text{Pol}(\mathbb{C}^n) \otimes \text{Pol}(\mathbb{C}^n) \quad (3.3.17)$$

explizit gegeben durch

$$Z = \frac{\partial}{\partial z^k} \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \quad \text{und} \quad \overline{Z} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \otimes \frac{\partial}{\partial z^k}. \quad (3.3.18)$$

Analog zu den Ergebnissen für  $\kappa$ -geordnete Sternprodukte können wir folgende Proposition formulieren.

**Proposition 3.3.5** (WICK-Produkt und  $\tilde{\kappa}$ -geordnete Sternprodukte).

Die  $\tilde{\kappa}$ -geordneten Sternprodukte auf  $\text{Pol}(\mathbb{C}^n)$  haben die Form

$$f \star_{\tilde{\kappa}} g = \mu \circ e^{(\tilde{\kappa}+1)\hbar Z + (\tilde{\kappa}-1)\hbar \overline{Z}}(f \otimes g), \quad (3.3.19)$$

womit sich für das WICK-Produkt folgender Ausdruck ergibt

$$\begin{aligned} f \star_{\text{Wick}} g &= \mu \circ e^{2\hbar Z}(f \otimes g) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\hbar)^r}{r!} \sum_{k_1, \dots, k_r} \frac{\partial^r f}{\partial z^{k_1} \dots \partial z^{k_r}} \frac{\partial^r g}{\partial \bar{z}^{k_1} \dots \partial \bar{z}^{k_r}}. \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Für alle  $\tilde{\kappa}$ -geordneten Produkte ist die komplexe Konjugation ein antilinearer Antiautomorphismus, d. h. alle  $\tilde{\kappa}$ -geordneten Produkte sind HERMITESCH

$$\overline{f \star_{\tilde{\kappa}} g} = \overline{g} \star_{\tilde{\kappa}} \overline{f}. \quad (3.3.21)$$

Da  $P - P^* = \frac{2}{i}(Z - \overline{Z})$  ist, erhält man für  $\tilde{\kappa} = 0$  das WEYL-Produkt  $\star_{\tilde{\kappa}=0} = \star_{\text{Weyl}}$ .

**Bemerkung 3.3.6.**

Es ist interessant, die letzte Gleichung in Beziehung zur kanonischen POISSON-Klammer auf  $\mathbb{R}^{2n}$  zu setzen

$$\{f, g\} = \mu \circ (P - P^*)(f \otimes g) = \frac{2}{i} \mu \circ (Z - \overline{Z})(f \otimes g). \quad (3.3.22)$$

Damit können wir das WEYL-Produkt als eine „exponentenzierte“ POISSON-Klammer deuten.

Wir wollen die Eigenschaften der bisher betrachteten Sternprodukte zusammenfassen. Im nächsten Kapitel werden wir diese Eigenschaften nutzen, um Sternprodukte zu axiomatisieren.

**Bemerkung 3.3.7** (Eigenschaften der Sternprodukte  $\star_\kappa$  und  $\star_{\tilde{\kappa}}$ ).

i.) Jedes der bisher behandelten Sternprodukte läßt sich in der Form

$$f \star g = fg + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n B_n(f, g) \quad (3.3.23)$$

schreiben, dabei sind alle  $B_n$  Bidifferentialoperatoren der Differentiationsordnung  $n$ . Sind die Funktionen  $f, g$  polynomial in den Koordinatenfunktionen, so bricht die unendliche Summe in Gleichung (3.3.23) nach endlich vielen Termen ab. Für den Grenzfall  $\hbar \rightarrow 0$  wird die klassische, kommutative Algebra reproduziert.

ii.) Die Sternprodukte  $\star_\kappa$  und  $\star_{\tilde{\kappa}}$  sind assoziative Verknüpfungen.

iii.)  $f \star g - g \star f = i\hbar\{f, g\} + \mathcal{O}(\hbar^2)$ . Der schiefsymmetrische Teil des Kommutators modulo Termen der Ordnung  $\mathcal{O}(\hbar^2)$  ist proportional zur POISSON-Klammer.

iv.)  $f \star 1 = 1 \star f = f$ . Das Einselement der undeformierten Algebra ist auch das Einselement bezüglich des Sternprodukts.

v.)  $\overline{f \star_{\tilde{\kappa}} g} = \overline{g} \star_{\tilde{\kappa}} \overline{f}$  und  $\overline{f \star_{\kappa} g} = \overline{g} \star_{1-\kappa} \overline{f}$ . Das heißt für alle  $\tilde{\kappa}$ -Sternprodukte ist die komplexe Konjugation ein antilinearer Antiautomorphismus und ebenso für das WEYL-Produkt, das der Ordnung  $\kappa = \frac{1}{2}$  entspricht.

### 3.4 Formale Deformationstheorie

Aus dem im letzten Kapitel Erarbeiteten wollen wir nun eine Verallgemeinerung für Sternprodukte angeben. Dazu definieren wir zuerst *Deformationen* einer assoziativen Algebra wie sie von GERSTENHABER [1964] vorgeschlagen wurden. In Kapitel 4.2 werden wir im Rahmen der MORITA-Äquivalenz von deformierten Algebren auch die Deformation von Moduln benötigen, diese jedoch erst dort einführen. In Kapitel 3.4.2 werden wir darauf aufbauend eine Definition für *formale Sternprodukte* angeben. Ein formales Sternprodukt wird eine assoziative Algebra sein, allerdings mit weiteren Strukturen, die als Axiomatisierung der in Bemerkung 3.3.7 herausgestellten Ergebnisse zu verstehen sind. Da von hier an *formale Potenzreihen* eine zentrale Rolle spielen werden, verweisen wir auf Anhang A.1.2, in dem wir dieses algebraische Konzept näher beschreiben.

#### 3.4.1 Deformationen von Algebren

**Definition 3.4.1** (Deformation einer assoziativen Algebra).

Sei  $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$  die komplexe Erweiterung eines geordneten Rings  $\mathbb{R}$  und  $\mathcal{A}$  eine assoziative Algebra über  $\mathbb{C}$ . Eine formale Deformation der Algebra  $\mathcal{A}$  ist ein  $\mathbb{C}[[\lambda]]$ -lineares assoziatives Produkt  $\star$  auf  $\mathcal{A}[[\lambda]]$ , so daß  $(\mathcal{A}[[\lambda]], \star) = \mathcal{A}$  eine assoziative Algebra wird, und das Produkt von der Form

$$a \star a' = aa' + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n C_n(a, a') \quad (3.4.1)$$

ist. Dabei sind die  $C_n : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$   $\mathbb{C}$ -bilineare Abbildungen,  $a, a' \in \mathcal{A}$  und  $\lambda$  ist ein reeller, formaler Parameter. Ist die Algebra  $\mathcal{A}$  mit einem Einselement  $1_{\mathcal{A}}$  ausgestattet, so soll  $1_{\mathcal{A}}$  auch das Einselement der deformierten Algebra  $\mathcal{A}$  sein, d. h.  $1_{\mathcal{A}} \star a = a \star 1_{\mathcal{A}} = a$  für alle  $a \in \mathcal{A}$ .

**Bemerkungen 3.4.2** (Assoziativität).

- i.) Die Assoziativität des deformierten Produktes  $\star$  liefert offensichtlich eine Bedingung an die  $C_n$ . Insbesondere ist der schiefsymmetrische Teil von  $C_1$  proportional zu einer POISSON-Klammer, bzw. definiert eine POISSON-Klammer

$$\{a, a'\} := C_1(a, a') - C_1(a', a).$$

- ii.) Aufgrund der Assoziativität des Produktes  $\star$ , ist es nötig, die Abbildungen  $C_n$  auf formale Potenzreihen zu erweitern, so daß alle  $C_n : \mathcal{A}[[\lambda]] \times \mathcal{A}[[\lambda]] \rightarrow \mathcal{A}[[\lambda]]$  zu  $\mathbb{C}[[\lambda]]$ -bilinearen Abbildungen werden.

**Definition 3.4.3** (Äquivalenz zweier deformierter assoziativer Algebren).

Man nennt zwei Deformationen  $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{A}[[\lambda]], \star_1)$  und  $\mathcal{A}_2 = (\mathcal{A}[[\lambda]], \star_2)$  der Algebra  $\mathcal{A}$  äquivalent, falls es  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildungen  $T_r : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  gibt, so daß

$$T = \text{id} + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r T_r : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2 \quad (3.4.2)$$

ein Algebrasomorphismus ist. Die Äquivalenzklasse einer Deformation  $\star$  bezeichnet man mit  $[\star]$  und die Menge der Äquivalenzklassen von Deformationen einer Algebra  $\mathcal{A}$  mit  $\text{Def}(\mathcal{A})$ . Desweiteren wollen wir die Äquivalenzklassen der Deformationen von  $\mathcal{A}$  zu einer festen POISSON-Struktur (vgl. Bemerkung 3.4.2 i.) mit  $\text{Def}(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$  bezeichnen.

**Proposition 3.4.4** (Isomorphe Deformationen).

Seien  $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{A}[[\lambda]], \star_1)$  und  $\mathcal{A}_2 = (\mathcal{A}[[\lambda]], \star_2)$  zwei formale Deformationen der Algebra  $\mathcal{A}$ , dann sind diese genau dann isomorph, wenn es einen Automorphismus  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{A})$  gibt, so daß  $[\phi^*(\star_2)] = [\star_1]$  ist.

**Definition 3.4.5** (HERMITESche Deformation).

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\ast$ -Algebra (vgl. Definition 1.1.13). Man nennt eine formale Deformation  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}[[\lambda]], \star)$  HERMITESch, falls  $(a \star a')^* = a'^* \star a^*$  für alle  $a, a' \in \mathcal{A}$ .

**Lemma 3.4.6** (HERMITESche Äquivalenztransformation, [BURSZTYN & WALDMANN 2000]).

Sei  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  und seien  $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{A}[[\lambda]], \star_1)$  und  $\mathcal{A}_2 = (\mathcal{A}[[\lambda]], \star_2)$  zwei äquivalente HERMITESche Deformationen der Algebra  $\mathcal{A}$ , so existiert eine Äquivalenztransformation  $T : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ , so daß  $T(a^*) = T(a)^*$  für alle  $a \in \mathcal{A}_1$ .

Bevor wir uns in Kapitel 3.4.2 der Definition von formalen Sternprodukten widmen, wollen wir den *klassischen Limes* einer deformierten Algebra definieren. Dieser ist im Bezug auf das Quantisieren von großer Wichtigkeit. Anders als in der kanonischen Quantisierung, bei der die Definition eines klassischen Limes nichttrivial ist, kann man im Rahmen von (formal) deformierten Algebren sehr einfach den klassischen Limes definieren. Insbesondere bei der im fünften Kapitel betrachteten MORITA-Theorie von deformierten Algebren wird der klassischen Limes-Abbildung eine wichtige Rolle zukommen.

**Definition 3.4.7** (Die klassische Limes-Abbildung  $\text{cl}$ ).

Sei  $\mathcal{A}$  eine deformierte Algebra nach Definition 3.4.1. Wir bezeichnen die Abbildung

$$\text{cl} : \mathcal{A} \ni \sum_{n=0} \lambda^n a_n \mapsto a_0 \in \mathcal{A}, \quad (3.4.3)$$

als die klassische Limes-Abbildung. Die Algebra  $\mathcal{A}$  bezeichnet man dann als den klassischen Limes der Algebra  $\mathcal{A}$ .

Die klassische Limes-Abbildung ist offensichtlich physikalisch motiviert, da wir von der deformierten Theorie zurück zur klassischen Theorie gelangen möchten. Dies entspricht in der Sprache des Physikers einem Übergang „ $\hbar \rightarrow 0$ “. Dieser Übergang ist im Rahmen formaler Potenzreihen offensichtlich wohldefiniert.

### 3.4.2 Formale Sternprodukte

In der klassischen Physik kommt, wie wir in Kapitel 3.2 gesehen haben, der POISSON-Struktur eine wichtige Rolle zu. Dies in der Formulierung von Sternprodukten zu implementieren, war bereits bei der Konstruktion der Sternprodukte auf einem flachen Phasenraum in Kapitel 3.3 von fundamentaler Wichtigkeit. Die Assoziativität einer Deformation bringt automatisch eine POISSON-Struktur ins Spiel (vgl. Bemerkungen 3.4.2), die wir uns im weiteren zu Nutze machen werden.

Wir wollen nun „allgemeinere“ Sternprodukte definieren und die wichtigen Strukturen, die wir in Bemerkung 3.3.7 zusammengetragen haben, übernehmen, um eine möglichst allgemeine Klasse von assoziativen, deformierten Algebren zu erhalten.

Wir werden in diesem Kapitel eine allgemeine Definition angeben und Sternprodukte über diese Eigenschaften axiomatisieren, wie es von BAYEN *et al.* [1977] vorgeschlagen wurde. Dies bedeutet insbesondere, daß wir uns nun komplett von der Algebra der Operatoren trennen, mit deren Hilfe wir in Kapitel 3.3 die ersten Sternprodukte eingeführt haben. Da wir desweiteren eine differentielle Struktur benötigen, stellt sich der Raum der glatten Funktionen auf POISSON-Mannigfaltigkeiten mit formalen Potenzreihen als die richtige Kategorie heraus. Diese so erhaltene deformierte Algebra werden wir dann mit  $(C^\infty(M) [[\lambda]], \star)$  kennzeichnen und sie als ein *formales Sternprodukt* bezeichnen. Formal deswegen, weil formale Potenzreihen erstmal ein rein algebraisches Konzept darstellen. Der Parameter  $\lambda$  ist keine reelle Zahl, und erst in einem konvergenten Rahmen können wir dazu übergehen,  $\lambda \rightsquigarrow \hbar$  anzunehmen. Den Preis, den man für diese formale Definition eines Sternprodukts zahlt ist damit offensichtlich: man kann keinerlei Aussagen über Konvergenz machen! Einen konvergenten Rahmen zu schaffen, verlangt viel Arbeit und ist im allgemeinen extrem schwierig zu konstruieren. Die Konstruktion einer konvergenten Unter algebra  $\mathcal{A}_\hbar$  der formalen Potenzreihen der reell-analytischen Funktionen  $C^\omega(\mathbb{C}^n) [[\lambda]]$  für das WICK-Produkt  $(\mathcal{A}_\hbar, \star_{\text{Wick}})$  mit  $\lambda = \hbar$  findet man in [BEISER *et al.* 2005; BEISER 2005].

**Definition 3.4.8** (Formale Sternprodukte).

Sei  $(M, \Lambda)$  eine POISSON-Mannigfaltigkeit. Ein formales Sternprodukt ist eine  $\mathbb{C}[[\lambda]]$ -bilineare Abbildung  $\star : C^\infty(M) [[\lambda]] \times C^\infty(M) [[\lambda]] \rightarrow C^\infty(M) [[\lambda]]$  der Form

$$f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n C_n(f, g), \quad (3.4.4)$$

so daß für alle  $f, g, h \in C^\infty(M) [[\lambda]]$  gilt:

- i.)  $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$  (Assoziativität des Sternprodukts),
- ii.)  $f \star g = fg + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n C_n(f, g)$  (Deformation des punktweisen Produkts),
- iii.)  $f \star g - g \star f = i\lambda\{f, g\} + \mathcal{O}(\lambda^2)$  (Deformation in Richtung der POISSON-Klammer),
- iv.)  $f \star 1 = 1 \star f = f$  (Die konstante Funktion 1 ist Einselement).

Dabei ist  $\lambda$  ein formaler Parameter. Man bezeichnet die deformierte, assoziative Sternproduktalgebra mit  $(C^\infty(M) [[\lambda]], \star)$ . Alternativ spricht man von  $(M, \Lambda, \star)$ , einer POISSON-Mannigfaltigkeit  $M$  mit Sternprodukt.

**Bemerkung 3.4.9** (Symplektischer Fall).

Oft benötigen wir symplektische Mannigfaltigkeiten mit Sternprodukt, die wir mit  $(M, \omega, \star)$  bezeichnen werden.

**Bemerkung 3.4.10** (Alternative Formulierung).

Mit Hilfe der bilinearen  $C_n : C^\infty(M) [[\lambda]] \times C^\infty(M) [[\lambda]] \rightarrow C^\infty(M) [[\lambda]]$  können wir eine dazu äquivalente Definition von Sternprodukten angeben. Für manche Anwendung wird sich diese Schreibweise als nützlich erweisen. Sei im weiteren  $n \in \mathbb{N}$ , dann sind die Punkte i.) bis iv.) aus Definition 3.4.8 äquivalent zu

- i.)  $\sum_{s=0}^n [C_s(C_{n-s}(f, g), h) - C_s(f, C_{n-s}(g, h))] = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,
- ii.)  $C_0(f, g) = fg$ ,
- iii.)  $C_1(f, g) - C_1(g, f) = i\{f, g\}$ ,
- iv.)  $C_n(f, 1) = C_n(1, f) = 0$  für  $n \geq 1$ .

Man sieht mit etwas Arbeit beispielsweise an i.), daß die Assoziativität ein kohomologisches Problem ist und eine Obstruktion in der HOCHSCHILD-Kohomologie darstellt; siehe hierzu beispielsweise [GUTT & RAWNSLEY 1999].

Die Forderung der HERMITEZITÄT, d. h. die Existenz einer \*-Involution auf der deformierten Algebra  $(C^\infty(M) [[\lambda]], \star)$ , auf die wir in den einführenden Kapitel relativ viel Wert gelegt haben, ist nicht Teil der Definition von Sternprodukten. Statt dessen werden wir es als eine Struktur ansehen, die ein Sternprodukt haben kann. Dies ändert allerdings nichts an der Tatsache, daß für die Physik die Sternprodukte, bei denen die komplexe Konjugation ein antilinearer Antiautomorphismus ist, eine wichtige Rolle spielen.

**Definition 3.4.11** (Typen von Sternprodukten).

Gegeben sei eine POISSON-Mannigfaltigkeit  $(M, \Lambda, \star)$  mit einem Sternprodukt nach Definition 3.4.8. Man nennt ein Sternprodukt

- i.) HERMITESCH, falls  $\overline{f \star g} = \overline{g} \star \overline{f}$  für alle  $f, g \in C^\infty(M) [[\lambda]]$ ,
- ii.) lokal falls  $\text{supp}(f \star g) \subseteq \text{supp}(f) \cap \text{supp}(g)$  für alle  $f, g \in C^\infty(M) [[\lambda]]$ ,
- iii.) differentiell, falls alle  $C_n$  Multidifferentialoperatoren sind.

Wir werden uns auch in Zukunft auf *differentielle* Sternprodukte beschränken, und daher einige Definitionen dazu angeben.

**Definition 3.4.12** (Typen differentieller Sternprodukte).

Gegeben sei eine POISSON-Mannigfaltigkeit  $(M, \Lambda, \star)$  mit einem Sternprodukt.

- i.) Man nennt ein Sternprodukt natürlich oder vom VEY-Typ, falls alle  $C_r$  Bidifferentialoperatoren der Ordnung  $r$  in jedem Argument sind.
- ii.) Man nennt ein Sternprodukt  $f \star g = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{i\lambda}{2}\right)^r C_r(f, g)$  vom WEYL-Typ, falls alle  $C_r$  reell sind und  $C_r(f, g) = (-1)^r C_r(g, f)$  gilt. Insbesondere bedeutet dies, daß  $C_1(f, g)$  gleich der POISSON-Klammer ist:  $C_1(f, g) = \{f, g\}$ .
- iii.) Auf dem Kotangentenbündel  $(M = T^*Q, \omega_0)$  nennt man ein Sternprodukt vom standardgeordneten Typ, falls mit der kanonischen symplektischen Form  $\omega_0$  die erste Funktion nur in Faserrichtung differenziert wird. Als Phasenraum entspricht dies der Differentiation in Impulsrichtung. Analog definiert man den antistandardgeordneten Typ, d. h. falls die zweite Funktion nur in Faserrichtung differenziert wird.
- iv.) Sei  $(M, \omega, I, g, \star)$  eine KÄHLER-Mannigfaltigkeit mit einem Sternprodukt  $\star$ , so nennt man ein Sternprodukt vom WICK-Typ, falls die erste Funktion nur in holomorphe, die zweite nur in antiholomorphe Richtung differenziert wird, und vom Anti-WICK-Typ, falls die erste Funktion nur in antiholomorphe Richtung und die zweite nur in holomorphe Richtung differenziert wird.

Nachdem wir Sternprodukte definiert haben, liegt die Frage nach der Existenz solcher Objekte auf Mannigfaltigkeiten nahe. In den Artikeln [DE WILDE & LECOMTE 1983b] beziehungsweise [DE WILDE & LECOMTE 1984] wurde die Existenz von Sternprodukten auf Kotangentenbündeln  $T^*Q$  einer Basismannigfaltigkeit  $Q$  gezeigt. Später gelang DE WILDE & LECOMTE [1983a, c] der Beweis der Existenz von Sternprodukten auf beliebigen symplektischen Mannigfaltigkeiten  $(M, \omega)$ . Dieser Beweis ist ein reiner Existenzbeweis und gibt keine Vorgehensweise für die Konstruktion von Sternprodukten an. Einen Durchbruch gelang FEDOSOV [1994, 1996], da er ein (rekursives) Rezept für die Konstruktion von Sternprodukten auf symplektischen Mannigfaltigkeiten mit einem symplektischen Zusammenhang  $(M, \omega, \nabla)$  angeben konnte. Diese Konstruktion werden wir in Kapitel 3.6.1 genauer beschreiben. Mit Hilfe einer leicht abgeänderten Variante der FEDOSOV-Konstruktion konnten BORDEMANN *et al.* [1998, 1999] zeigen, daß es standardgeordnete Sternprodukte auf Kotangentenbündeln gibt. Dies gelang unabhängig davon PFLAUM [1998, 2000]. Für KÄHLER-Mannigfaltigkeiten zeigte BORDEMANN & WALDMANN [1997] mit einer geänderten FEDOSOV-Konstruktion, die Existenz von WICK-Produkten. Ein Jahr zuvor veröffentlichte KARABEGOV [1996], daß es auf KÄHLER-Mannigfaltigkeiten immer Sternprodukte mit Trennung der Variablen gibt. Weitere Ausführungen dazu findet man bei KARABEGOV [1999]; NEUMAIER [2003]. Im Jahre 1997, über ein Jahrzehnt nach dem allgemeinen Existenzbeweis für symplektische Mannigfaltigkeiten von LECOMTE und DE WILDE, gelang KONTSEVICH [2003] der (konstruktive) Beweis für die Existenz von Sternprodukten auf POISSON-Mannigfaltigkeiten. Zusammenfassend können wir folgenden Satz formulieren.

**Satz 3.4.13** (Existenz verschiedener Typen von Sternprodukten).

- i.) Auf jeder symplektischen Mannigfaltigkeit  $(M, \omega)$  existieren (differentielle, natürliche, HERMITESCHE) Sternprodukte nach Definition 3.4.8.
- ii.) Auf jeder symplektischen Mannigfaltigkeit gibt es Sternprodukte vom WEYL-Typ.
- iii.) Auf jeder KÄHLER-Mannigfaltigkeit  $(M, \omega, I, g)$  existieren natürliche Sternprodukte vom (Anti-) WICK-Typ.
- iv.) Auf jedem Kotangentenbündel  $(T^*Q, \omega_0)$  existieren Sternprodukte vom (anti-)standardgeordneten Typ.

v.) Auf jeder POISSON-Mannigfaltigkeit  $(M, \Lambda)$  existieren (natürliche, HERMITESche) Sternprodukte.

### 3.5 Äquivalenz und Klassifikation von Sternprodukten

Nachdem wir in Kapitel 3.4.2 die Existenz von Sternprodukten geklärt haben, wollen wir kurz auf die Eindeutigkeit eingehen. Schon im flachen Fall des  $\mathbb{R}^{2n}$  haben wir gesehen, daß Sternprodukte auf einer festen Mannigfaltigkeit nicht eindeutig sind. Statt dessen konnten wir eine *Familie* von Sternprodukten angeben. Ebenso werden wir auf symplektischen oder POISSON-Mannigfaltigkeiten Familien von Sternprodukten identifizieren können. Dazu werden wir im folgenden einen Äquivalenzbegriff definieren.

**Definition 3.5.1** (Äquivalenz von Sternprodukten).

Man nennt zwei (differentielle) Sternprodukte  $\star$  und  $\star'$  auf der POISSON-Mannigfaltigkeit  $(M, \Lambda)$  genau dann äquivalent, falls es eine formale Potenzreihe

$$T = \text{id} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T_n \quad (3.5.1)$$

mit  $\mathbb{C}$ -linearen (Differential-) Operatoren  $T_n : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  mit  $T_n(1) = 0$  gibt, so daß für alle  $f, g \in C^\infty(M) [[\lambda]]$

$$T(f \star g) = (Tf) \star' (Tg) \quad (3.5.2)$$

ist.

Beispiele für solche Äquivalenzen sind die  $\kappa$ - und  $\tilde{\kappa}$ -Ordnungen, die man aus dem Standard- oder dem WICK-Produkt auf  $\mathbb{R}^{2n}$  bzw.  $\mathbb{C}^n$  erhält. Die Äquivalenz-Operatoren in Definition 3.5.1 sind damit eine Verallgemeinerung von  $N_\kappa$  und  $S_{\tilde{\kappa}}$ . Wir können nun zeigen, daß „äquivalent sein“ wirklich eine Äquivalenzrelation ist, und Sternprodukte einer Klasse eine Äquivalenzklasse bilden. Die Klassifizierung von Sternprodukten wird über die Äquivalenzklassen geschehen.

**Definiton und Lemma 3.5.2** (Äquivalenzrelation).

Die Äquivalenz von Sternprodukten in Definition 3.5.1 ist eine Äquivalenzrelation. Zwei Sternprodukte  $\star$  und  $\star'$  sind somit äquivalent, und wir schreiben  $\star \sim \star'$ , falls ein  $T$  existiert, so daß Gleichung (3.5.1) erfüllt ist. Man schreibt

$$\begin{aligned} [\star] &= \{\star' \mid \star \sim \star'\} \\ &= \{\star' \mid \exists T \text{ so daß } \forall f, g \in C^\infty(M) [[\lambda]] \ T(f \star g) = (Tf) \star' (Tg)\}. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Wir bezeichnen  $\star' \in [\star]$  als einen Repräsentanten der Klasse.

*Beweis.* Man prüft Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

*Reflexivität:* Klar. Man wählt  $T = \text{id}$ , d. h.  $T_n = 0$  für  $n \geq 1$ .

*Symmetrie:* Klar.  $T$  ist ein invertierbarer Operator, da er in unterster Ordnung mit der Identität beginnt und daher gilt  $T^{-1}(f \star g) = (T^{-1}f) \star (T^{-1}g)$ .

*Transitivität:* Seien  $T(\tilde{f} \star \tilde{g}) = (T\tilde{f}) \star' (T\tilde{g})$  und  $S(f \star g) = (Sf) \star'' (Sg)$ , dann ist  $f = T^{-1}\tilde{f}$ , etc. und damit  $(T^{-1}f) \star (T^{-1}g) = T^{-1}(f \star' g)$ . Folglich gilt

$$ST^{-1}(f \star' g) = S((T^{-1}f) \star (T^{-1}g)) = (ST^{-1})f \star'' (ST^{-1})g,$$

womit wir die Äquivalenz von  $\star'$  und  $\star''$  via  $R = ST^{-1}$  gezeigt haben.  $\square$

**Lemma 3.5.3** (Äquivalenz HERMITEScher Sternprodukte).

*Sind  $\star$  und  $\star'$  äquivalente, HERMITESche Sternprodukte auf  $(M, \Lambda)$ , so gibt es eine Äquivalenztransformation  $T$ , so daß  $\overline{T(f)} = T(\overline{f})$  für alle  $f \in C^\infty(M) [[\lambda]]$  ist.*

*Beweis.* Der Beweis ist in [NEUMAIER 2002, Prop. 5.6] nachzulesen.  $\square$

**Satz 3.5.4** (Klassifikation von symplektischen Sternprodukten I).

*Gegeben sei eine symplektische Mannigfaltigkeit  $(M, \omega)$ . Die Menge der Äquivalenzklassen ist in Bijektion zu  $H_{\text{dR}}^2(M) [[\lambda]]$ .*

*Beweis.* Der Beweis dieses Satzes findet sich in [BERTELSON *et al.* 1997; NEST & TSYGAN 1995a, b; DELIGNE 1995; GUTT & RAWNSLEY 1999].  $\square$

Genauer gesagt definiert jedes Sternprodukt  $\star$  eine *charakteristische Klasse*  $c(\star)$ .

$$\frac{1}{i\lambda}[\omega] + H_{\text{dR}}^2(M) [[\lambda]] \ni c(\star) = \frac{1}{i\lambda}[\omega] + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n [\omega_n]. \quad (3.5.4)$$

So kann man Satz 3.5.4 wie folgt auffassen.

**Satz 3.5.5** (Klassifikation von symplektischen Sternprodukten II).

*Gegeben sei eine symplektische Mannigfaltigkeit  $(M, \omega)$ . Zwei Sternprodukte  $\star$  und  $\star'$  sind genau dann äquivalent, wenn  $c(\star) = c(\star')$ .*

**Korollar 3.5.6** (Äquivalenz auf symplektischen Mannigfaltigkeiten).

*Sei  $(M, \omega)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit bei der die zweite DE RHAM Kohomologie verschwindet, d. h.  $H_{\text{dR}}^2(M) = \{0\}$ , so sind je zwei Sternprodukte  $\star$  und  $\star'$  äquivalent.*

**Korollar 3.5.7** (Äquivalenz von Sternprodukten auf dem  $\mathbb{R}^{2n}$ ).

*Alle Sternprodukte auf dem  $\mathbb{R}^{2n}$  sind äquivalent, d. h. bis auf die Wahl einer (verallgemeinerten) Ordnungsvorschrift ist die Quantisierung auf dem  $\mathbb{R}^{2n}$  eindeutig.*

**Beispiel 3.5.8** (Nichtäquivalente Sternprodukte).

Ein explizites Beispiel für nichtäquivalente Sternprodukte findet sich in [CAHEN *et al.* 1985]. Hier wird gezeigt, daß auf einem  $2n$ -dimensionalen Torus  $\mathbb{T}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$  Sternprodukte existieren, die nicht durch eine Äquivalenztransformation, d. h. einen Isomorphismus, ineinander überführt werden können. Dieses Beispiel war lange vor der Klassifikation bekannt und daher von Interesse. Nach Satz 3.5.4 ist dieses Beispiel trivial, da  $H_{\text{dR}}^2(\mathbb{T}^{2n}) \neq \{0\}$  ist.

Nun wollen wir noch die Klassifikation von Sternprodukten auf POISSON-Mannigfaltigkeiten angeben. Zusammenfassend läßt sich der folgende Satz (vgl. [KONTSEVICH 2003]) formulieren.



**Satz 3.5.9** (Klassifikation von Sternprodukten auf POISSON-Mannigfaltigkeiten).

Die Äquivalenzklassen  $[\star]$  von Sternprodukten auf einer POISSON-Mannigfaltigkeit  $(M, \Lambda_0)$  sind in Bijektion zu den Äquivalenzklassen  $[\Lambda]$  von formalen Deformationen  $\Lambda = \Lambda_0 + \sum_{n \geq 1} \lambda^n \Lambda_n \in \Gamma^\infty(\Lambda^2 TM)[[\lambda]]$  des POISSON-Tensors  $\Lambda_0$  modulo formalen Diffeomorphismen.

## 3.6 Konstruktion von Sternprodukten: FEDOSOV-Konstruktion

### 3.6.1 Die FEDOSOV-Konstruktion

Die FEDOSOV-Konstruktion ist nicht nur ein konstruktiver Beweis der Existenz von Sternprodukten auf symplektischen Mannigfaltigkeiten, sondern stellt desweiteren ein mächtiges Werkzeug zur Verfügung, um verschiedene Typen von Sternprodukten konstruieren und damit ihre Existenz beweisen zu können.

Wir werden in mehreren Schritten vorgehen. Zuerst zeigen wir recht ausführlich eine leichte Verallgemeinerung der von FEDOSOV gemachten Konstruktion. Diese erweitern wir in einem weiteren Schritt auf Vektorbündel. Die Schnitte im Vektorbündel stellen einen Bimodul für ein Sternprodukt von rechts und das deformierte Endomorphismenbündel des Vektorbündels von links dar. Das bedeutet, wir sind mit Hilfe einer Verallgemeinerung der Konstruktion in der Lage, nicht nur ein Sternprodukt für Funktionen auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit anzugeben, sondern es gelingt uns ferner, einen deformierten Bimodul zu konstruieren, bei dem alle Strukturen deformiert sind. In Kapitel 3.6.3 werden wir dann letztendlich eine unter einer Gruppenwirkung  $G$ -invariante FEDOSOV-Konstruktion präsentieren, die auf Vektorbündel erweitert wird. Zuvor werden wir aber die gewöhnliche Konstruktion nachvollziehen, wie man sie im wesentlichen schon in [FEDOSOV 1994, 1996] findet. Eine überarbeitete, moderne und ausführlichere Formulierung findet man in [NEUMAIER 2001; WALDMANN 2004b]. Auf Beweise werden wir in diesem Kapitel so gut wie vollständig verzichten, da sie beispielsweise in den zuvor erwähnten Quellen ausführlich dargelegt sind.

#### Das formale WEYL-Algebrabündel

Sei  $(M, \omega)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit. Wir betrachten einen Punkt  $p \in U \subseteq M$  in einer Umgebung  $U$ . Es existiert eine Karte  $(U, x)$  mit den lokalen Koordinaten  $(x^1, \dots, x^n)$ , so daß wir die symplektische Form sowie den POISSON-Tensor in der Form

$$\omega|_U = \frac{1}{2} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \quad \text{und} \quad \Lambda|_U = \frac{1}{2} \Lambda^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (3.6.1)$$

schreiben können, und es gilt  $\Lambda^{ij} = -\omega^{ij}$  und  $\omega^{ij} \omega_{jk} = \delta_k^i$ .

**Definition 3.6.1** (Die formale WEYL-Algebra).

Sei  $(M, \omega)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit. Die formale WEYL-Algebra über  $p$  ist die formal in Vervollständigung der  $\lambda$  gradierten, symmetrische Tensoralgebra über  $T_p^* M$ .

$$W_p = \prod_{k=0}^{\infty} W_p^k = \left( \prod_{k=0}^{\infty} S^k T_p^* M \right) [[\lambda]] \quad \text{mit} \quad W_p^k = S^k T_p^* M [[\lambda]]. \quad (3.6.2)$$

Die Elemente in  $W_p$  sind somit sowohl formale Potenzreihen in  $\lambda$  als auch formale Reihen im symmetrischen Grad der symmetrischen Tensoren über  $T_p^*M$ . Wir wollen die Algebra als die Unteralgebra  $W_p := (W \otimes \Lambda^0)_p$  von

$$(W \otimes \Lambda^\bullet)_p = \left( \prod_{k=0}^{\infty} S^k T_p^* M \otimes \Lambda^\bullet T_p^* M \right) [[\lambda]] \quad (3.6.3)$$

verstehen. In  $(W \otimes \Lambda^\bullet)_p$  haben Elemente die Form  $a = \sum_i f_i \otimes \alpha_i$ , sind also Linearkombinationen, wobei der hintere Teil die schiefsymmetrischen Tensoren über  $T_p^*M$  sind. Die Einsformen  $\theta$  kann man sowohl als symmetrisch wie auch als schiefsymmetrisch interpretieren, was wir durch die Schreibweise  $\theta \otimes 1$  bzw.  $1 \otimes \theta$  kennzeichnen werden. Auf der Algebra  $(W \otimes \Lambda^\bullet)_p$  können wir nun mittels des symmetrischen Produkts  $\vee$  und des schiefsymmetrischen Produkts  $\wedge$  ein assoziatives, im schiefsymmetrischen Teil  $\mathbb{Z}_2$ -gradiertes<sup>1</sup> Produkt  $\mu : (W \otimes \Lambda^\bullet)_p \times (W \otimes \Lambda^\bullet)_p \rightarrow (W \otimes \Lambda^\bullet)_p$  einführen. Für  $a = f \otimes \alpha$  und  $b = g \otimes \beta$  ist dann

$$\begin{aligned} \mu(a, b) &= ab = (f \otimes \alpha)(g \otimes \beta) = (f \vee g) \otimes (\alpha \wedge \beta) \\ &= (-1)^{k\ell} (g \vee f) \otimes (\beta \wedge \alpha) \\ &= (-1)^{k\ell} ba. \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Dabei ist  $\alpha \in \Lambda^k T_p^* M$  und  $\beta \in \Lambda^\ell T_p^* M$ .

**Definition 3.6.2** (Gradabbildungen auf  $(W \otimes \Lambda^\bullet)_p$ ).

Man definiert die folgenden Gradabbildungen auf der Algebra  $(W \otimes \Lambda^\bullet)_p$ .

$$\deg_a, \deg_s, \deg_\lambda : (W \otimes \Lambda^\bullet)_p \rightarrow (W \otimes \Lambda^\bullet)_p \quad (3.6.5)$$

- i.)  $\deg_s(f \otimes \alpha) = mf \otimes \alpha$  für  $f \in W_p^m$ ,
- ii.)  $\deg_a(f \otimes \alpha) = nf \otimes \alpha$  für  $\alpha \in \Lambda^n T_p^* M$ ,
- iii.)  $\deg_\lambda(f \otimes \alpha) = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}(f \otimes \alpha)$ ,
- iv.)  $\text{Deg} = \deg_s + 2 \deg_\lambda$ ,

Die ersten beiden Gradabbildungen messen den symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen Grad, die dritte den  $\lambda$ -Grad und die letzte den totalen Grad.

**Bemerkungen 3.6.3** (Gradabbildungen).

- i.) Der totale Grad ist derzeit noch unmotiviert, wird sich aber als nützlich herausstellen, wenn wir später die Struktur der FEDOSOV-Derivation oder des faserweisen Produkts verstehen wollen.
- ii.) Die Gradabbildungen sind Derivationen der Multiplikation  $\mu$ . Um dies zu zeigen, und für spätere Anwendungen, ist es nützlich, die Gradabbildung  $\deg_s$  und  $\deg_a$  in lokalen Koordinaten zu schreiben. Wir können zeigen, daß

$$\begin{aligned} \deg_s(f \otimes \alpha) &= (dx^i \otimes 1) i_s \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (f \otimes \alpha) \\ &= dx^i \vee i_s \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \otimes \alpha \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

<sup>1</sup> $\mathbb{Z}_2$ -gradierte Produkte, Klammern, Derivationen etc. werden oft auch mit dem Präfix *Super*- versehen, so daß man von Superprodukt, Superklammer, Superderivation, Superkommutativität, etc. spricht. Wir verwenden beide Bezeichnungen gleichermaßen.

und

$$\begin{aligned}\deg_a(f \otimes \alpha) &= (1 \otimes dx^i) i_a \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (f \otimes \alpha) \\ &= f \otimes dx^i \wedge i_a \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \alpha\end{aligned}\tag{3.6.7}$$

ist. Dabei bezeichnen wir mit  $i_s$  und  $i_a$  den symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen Einsetzer. Der Beweis erfolgt, indem man die Behauptung auf Tensoren in  $S^\bullet T_p^* M \otimes \Lambda^\bullet T_p^* M$  nachrechnet.

**Definition 3.6.4** (Die Differentiale  $\delta$ ,  $\delta^*$  und  $\delta^{-1}$ ).

Sei  $f \otimes \alpha \in (W \otimes \Lambda)_p$ . Wir definieren die Differentiale  $\delta$  und  $\delta^*$  mittels

$$\delta(f \otimes \alpha) := i_s \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \otimes dx^i \wedge \alpha, \tag{3.6.8}$$

$$\delta^*(f \otimes \alpha) := dx^i \vee f \otimes i_a \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \wedge \alpha. \tag{3.6.9}$$

Für homogene Elemente  $a \in (W^n \otimes \Lambda^m)_p$  sei weiter

$$\delta^{-1}a := \begin{cases} 0 & \text{falls } n+m = 0, \\ \frac{1}{n+m} \delta^* a & \text{falls } n+m \neq 0. \end{cases} \tag{3.6.10}$$

Die Abbildung  $\delta^{-1}$  ist linear auf alle Elemente in  $(W \otimes \Lambda)_p$  fortsetzbar. Es sei zu bemerken, daß  $\delta^{-1}$  nicht das Inverse von  $\delta$  ist, da  $\delta$  keinen invertierbaren Operator darstellt.

**Definition 3.6.5** (Der Projektionsoperator  $\sigma$ ).

Der Operator

$$\sigma : (W \otimes \Lambda)_p \rightarrow \mathbb{C}[[\lambda]] \tag{3.6.11}$$

ist die Projektion auf den symmetrischen und schiefsymmetrischen Grad 0.

Die Eigenschaften der Operatoren  $\delta, \delta^*, \delta^{-1}$  und  $\sigma$  werden im folgenden Lemma zusammengefaßt.

**Lemma 3.6.6** (Endomorphismen  $\delta$ ,  $\delta^*$ ,  $\delta^{-1}$  und  $\sigma$ ).

Es gilt

- i.) Die lokal definierten Abbildungen  $\delta$ ,  $\delta^*$ ,  $\delta^{-1}$  sind global definierte Objekte und nicht von einer Kartenwahl abhängig.
- ii.) Der Endomorphismus  $\delta$  verringert den symmetrischen Grad und erhöht den schiefsymmetrischen Grad um jeweils eins, was man formal als

$$[\deg_a, \delta] = -\delta \quad \text{und} \quad [\deg_s, \delta] = \delta \tag{3.6.12}$$

schreiben kann. Analog verringert  $\delta^*$  den schiefsymmetrischen Grad und erhöht den symmetrischen Grad

$$[\deg_a, \delta^*] = \delta^* \quad \text{und} \quad [\deg_s, \delta^*] = -\delta^*. \tag{3.6.13}$$

- iii.) Die Endomorphismen  $\delta$ ,  $\delta^*$  und  $\delta^{-1}$  sind nilpotent vom Grad 2, d. h. es gilt  $\delta^2 = (\delta^*)^2 = (\delta^{-1})^2 = 0$ .

iv.) Es gilt das POINCARÉ-Lemma für Differentialformen auf  $T_p M$ :

$$\delta\delta^{-1} + \delta^{-1}\delta + \sigma = \text{id}. \quad (3.6.14)$$

Insbesondere der letzten Gleichung wird eine wichtige Rolle zukommen. Zuerst wollen wir jedoch eine Deformation für die Algebra  $((W \otimes \Lambda^\bullet), \mu)$  angeben.

**Definition 3.6.7** (Das Faserweise WEYL-MOYAL-Produkt).

Das faserweise WEYL-MOYAL-Produkt  $\circ_{\text{Weyl}}$  ist für  $a, b \in (W \otimes \Lambda^\bullet)_p$  durch

$$a \circ_{\text{Weyl}} b = \mu \circ e^{\frac{i\lambda}{2} \Lambda_p^{k\ell} i_s \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \otimes i_s \left( \frac{\partial}{\partial x^\ell} \right)} (a \otimes b) \quad (3.6.15)$$

definiert.

**Lemma 3.6.8** (Eigenschaften des faserweisen WEYL-MOYAL-Produkts).

Das in Definition 3.6.7 definierte Produkt hat folgende Eigenschaften.

- i.) Das faserweise WEYL-MOYAL-Produkt ist global definiert und eine (koordinatenunabhängige) Deformation von  $((W \otimes \Lambda)_p, \mu)$ .
- ii.) Das faserweise WEYL-MOYAL-Produkt ist bezüglich des schiefsymmetrischen Teils und des totalen Grads  $\text{Deg}$  gradiert, allerdings nicht für  $\text{deg}_s$  und  $\text{deg}_\lambda$ . Die Abbildungen  $\delta$ ,  $\text{deg}_a$  und  $\text{Deg}$  sind – anders formuliert –  $\mathbb{Z}_2$ -gradierte Derivationen von  $\circ_{\text{Weyl}}$  von schiefsymmetrischen Grad  $+1$  für  $\delta$  bzw.  $0$  für  $\text{deg}_a$  und  $\text{Deg}$ .

Aufgrund der Gradierung des faserweisen Produktes  $\circ_{\text{Weyl}}$  wollen wir festlegen, was *homogene Elemente* bezüglich des  $\text{Deg}$ -Grades sind.

**Definiton und Lemma 3.6.9** (Homogene Elemente bezüglich des totalen Grades  $\text{Deg}$ ).

Wir definieren die homogenen Elemente bezüglich des totalen Grades vom Grad  $k$  als

$$W_p^{(k)} = \{a \in W_p \mid \text{Deg } a = ka\} \quad (3.6.16)$$

und weiter  $(W^{(k)} \otimes \Lambda)_p$ . Wir können  $W_p$  als kartesisches Produkt aller  $W_p^{(k)}$  auffassen und damit ist jedes Element  $a \in W_p$  von der Form  $a = \sum_{k=0}^{\infty} a^{(k)}$ , und jedes homogene Element in  $W_p^{(k)}$  ist von der Form

$$a^{(k)} = \sum_{r=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \lambda^r a_{k-2r}^{(k)}, \quad (3.6.17)$$

wobei die Klammer  $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  immer auf die nächste ganze Zahl abrundet.  $W_p$  ist damit *formal Deg-gradiert*, und Elemente vom  $\text{Deg}$ -Grad  $\geq k$  bezeichnen wir mit

$$(W_k \otimes \Lambda)_p = \bigcup_{n=k}^{\infty} (W^{(n)} \otimes \Lambda). \quad (3.6.18)$$

Man definiert mittels der schiefsymmetrischen Gradierung  $\text{deg}_a$  einen  $\mathbb{Z}_2$ -gradierten Kommutator bezüglich des deformierten Produktes  $\circ_{\text{Weyl}}$ , der gegeben ist durch

$$\text{ad}(a)(b) = [a, b]_{\circ_{\text{Weyl}}} = a \circ_{\text{Weyl}} b - (-1)^{mn} b \circ_{\text{Weyl}} a \quad (3.6.19)$$

mit  $a \in (W \otimes \Lambda^m)_p$  und  $b \in (W \otimes \Lambda^n)_p$ . Das deformierte Produkt  $\circ_{\text{Weyl}}$  ist im Gegensatz zu  $\mu$  nicht mehr superkommutativ. Als *Zentrum* bezeichnen wir alle Elemente  $a$  für die  $\text{ad}(a) = 0$  ist. Dies ist immer genau dann der Fall, wenn  $\deg_s a = 0$ .

**Bemerkung 3.6.10** (Quasiinnere Derivation).

Wir werden  $\mathbb{Z}_2$ -gradierte Derivationen von  $\circ_{\text{Weyl}}$  in der Form  $\frac{i}{\lambda} \text{ad}(a)$  schreiben. Dies ist wohldefiniert, da die unterste Ordnung von  $\lambda$  im Kommutator verschwindet. Man nennt eine solche Derivation eine *quasiinnere Derivation*.

**Definition 3.6.11** (Bündel aller formalen WEYL-Algebren).

Wir definieren das Bündel aller formalen WEYL-Algebren für  $p \in M$  als

$$W = \bigcup_{p \in M} W_p \quad \text{und} \quad W \otimes \Lambda^\bullet = \bigcup_{p \in M} (W \otimes \Lambda^\bullet)_p. \quad (3.6.20)$$

Das so definierte Vektorbündel hat unendlichdimensionale Fasern. Wir können eine glatte Struktur für  $W$  und  $(W \otimes \Lambda)$  angeben und daher glatte Schnitte definieren, und schreiben

$$\mathcal{W} = \left( \prod_{k=0}^{\infty} \Gamma^\infty(S^k T^* M) \right) [[\lambda]], \quad (3.6.21)$$

$$\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet = \left( \prod_{k=0}^{\infty} \Gamma^\infty(S^k T^* M \otimes \Lambda^\bullet T^* M) \right) [[\lambda]]. \quad (3.6.22)$$

Wir setzen alle bisher eingeführten punktwisen Abbildungen, d. h.  $\deg_a$ ,  $\deg_s$ ,  $\deg_\lambda$ ,  $\text{Deg}$ ,  $\delta$ ,  $\delta^*$ ,  $\delta^{-1}$ ,  $\sigma$ ,  $\mu$  und  $\circ_{\text{Weyl}}$  auf  $\mathcal{W}$  bzw.  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet$  fort. Damit ist  $(\mathcal{W}, \circ_{\text{Weyl}})$  eine assoziative Algebra über  $\mathbb{C}[[\lambda]]$ , und  $\text{Deg}$  wird zu einer Derivation dieser. Es gilt weiterhin die wichtige Gleichung

$$\delta \delta^{-1} + \delta^{-1} \delta + \sigma = \text{id} \quad \text{mit} \quad \sigma : \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \rightarrow C^\infty(M) [[\lambda]]. \quad (3.6.23)$$

### Die FEDOSOV-Derivation $\mathcal{D}$

Nachdem wir nun die zugrundeliegende Algebra definiert und deren wichtige Eigenschaften erläutert haben, wollen wir uns in einem zweiten Schritt der Konstruktion eines Sternproduktes widmen. Dies bedeutet konkret, daß wir eine Unter algebra von  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet$  suchen, die mittels  $\sigma$  in Bijektion zu  $C^\infty(M) [[\lambda]]$  ist. Das mit  $\sigma$  zurückgezogene faserweise Produkt  $\circ_{\text{Weyl}}$  liefert dann ein  $\mathbb{C}[[\lambda]]$ -lineares Produkt, das sich bei geeigneter Wahl der Unter algebra von  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet$  als ein Sternprodukt herausstellt. Diese Algebra erhält man als Kern der  $\mathbb{Z}_2$ -gradierten FEDOSOV-Derivation.

Wir benötigen für die weitere Konstruktion einen torsionsfreien, symplektischen Zusammenhang  $\nabla$ , den es nach den Lemmata A.7.7 und A.7.9 auf jeder symplektischen Mannigfaltigkeit gibt. Die Krümmung  $\hat{R}$  ist in Kapitel A.7.2 beschrieben. Die *symplektische Krümmung* (vergleiche Lemma A.7.10)

$$R(Z, U, X, Y) = \omega(Z, \hat{R}(X, Y)U) \quad (3.6.24)$$

ist ein Element in  $R \in \Gamma^\infty(S^2 T^* M \otimes \Lambda^2 T^* M)$  und damit als ein Element der Algebra  $(\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet)$  zu interpretieren. Es gilt

$$\deg_s R = 2R, \quad \deg_a R = 2R, \quad \deg_\lambda R = 0. \quad (3.6.25)$$

Wir verwenden nun den Zusammenhang, um ein kovariantes Differential zu definieren.

**Lemma 3.6.12** (Kovariantes Differential  $D$ ).

Sei  $\nabla$  ein torsionsfreier, symplektischer Zusammenhang. Das kovariante Differential

$$D : \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \rightarrow \mathcal{W} \otimes \Lambda^{\bullet+1} \quad (3.6.26)$$

ist in lokalen Koordinaten mittels

$$\begin{aligned} D(f \otimes \alpha) &= dx^i \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(f \otimes \alpha) \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} f \otimes dx^i \wedge \alpha + f \otimes dx^i \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \alpha \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} f \otimes dx^i \wedge \alpha + f \otimes d\alpha. \end{aligned} \quad (3.6.27)$$

kartenunabhängig und global definiert.

Wir wollen dessen Eigenschaften in der folgenden Proposition zusammenfassen.

**Proposition 3.6.13** (Eigenschaften des kovarianten Differentials  $D$ ).

Das kovariante Differential  $D : \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \rightarrow \mathcal{W} \otimes \Lambda^{\bullet+1}$  hat die folgenden Eigenschaften:

- i.)  $[\deg_s, D] = [\deg_\lambda, D] = [\text{Deg}, D] = 0$  und  $[\deg_a, D] = D$ .
- ii.)  $D$  ist eine Superderivation des undeformierten Produkts  $\mu$  und des faserweisen WEYL-MOYAL-Produkts  $\circ_{\text{Weyl}}$

$$D(a \circ_{\text{Weyl}} b) = (Da) \circ_{\text{Weyl}} b + (-1)^k a \circ_{\text{Weyl}} (Db), \quad (3.6.28)$$

mit  $a \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^k$  und  $b \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet$ .

- iii.)  $DR = 0$ ,  $[\delta, D] = \delta D + D\delta = 0$  und

$$D^2 = [D, D] = \frac{i}{\lambda} \text{ad}(R). \quad (3.6.29)$$

Wie bereits am Anfang dieses Kapitels angedeutet, wollen wir eine Superderivation  $\mathcal{D}$  konstruieren, deren Kern via  $\sigma$  in Bijektion zu  $C^\infty(M) [[\lambda]]$  ist. Die Superderivation  $\delta$  wäre ein solcher Kandidat, allerdings ist das so geerbte Produkt auf  $C^\infty(M) [[\lambda]]$  nur das punktweise Produkt. Ebenso stellt sich  $-\delta + D$  als unzureichend heraus, obwohl es sich immer noch um eine Superderivation handelt. Der Kern ist jedoch zu klein, da  $D^2 = \frac{i}{\lambda} \text{ad}(R) \neq 0$ . Eine Verbesserung dieser Formel erhalten wir durch

$$\mathcal{D} = -\delta + D + \frac{i}{\lambda} \text{ad}(r), \quad (3.6.30)$$

wobei  $r \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^1$ . Damit ist  $\mathcal{D} : \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \rightarrow \mathcal{W} \otimes \Lambda^{\bullet+1}$ . Man kann Gleichung (3.6.30) als eine nach dem totalen Grad entwickelte Summe auffassen, da  $\delta$  den totalen Grad um 1 verringert,  $D$  den

totalen Grad konstant hält, und  $\text{ad}(r)$  den Grad um mehr als 0 erhöhen soll. Damit ist  $r$  vom Deg-Grad  $\geq +3$ , d. h.

$$r = \sum_{k=3}^{\infty} r^k \in \mathcal{W}_3 \otimes \Lambda^1 \quad \text{mit} \quad r^k \in \mathcal{W}^{(k)} \otimes \Lambda^1. \quad (3.6.31)$$

Die Krümmung von  $\nabla$  stellt eine Obstruktion für die Größe des Kerns dar, daher wollen wir eine Formel für  $\mathcal{D}^2$  berechnen. Wir erhalten für ein beliebiges  $r \in \mathcal{W}_3 \otimes \Lambda^1$

$$\mathcal{D}^2 = \frac{1}{2}[\mathcal{D}, \mathcal{D}] = \frac{i}{\lambda} \text{ad}(-\delta r + R + Dr + \frac{i}{\lambda} r \circ_{\text{Weyl}} r) \quad (3.6.32)$$

sowie

$$\mathcal{D}(-\delta r + R + Dr + \frac{i}{\lambda} r \circ_{\text{Weyl}} r) = 0. \quad (3.6.33)$$

Wir werden nun den entscheidenden Satz zur FEDOSOV-Derivation formulieren.

**Satz 3.6.14** (FEDOSOV-Derivation  $\mathcal{D}$ ).

Sei  $\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \Omega_k \in \lambda \Gamma^{\infty}(\Lambda^2 T^* M)$   $[[\lambda]]$  eine geschlossene Zweiform,  $d\Omega = 0$ , und sei  $s \in \mathcal{W}_3 \otimes \Lambda^0$  mit  $\sigma(s) = 0$ . Es gibt ein eindeutiges Element  $r \in \mathcal{W}_3 \otimes \Lambda^1$  mit

$$\delta r = R + Dr + \frac{i}{\lambda} r \circ_{\text{Weyl}} r + (1 \otimes \Omega) \quad \text{und} \quad \delta^{-1} r = s. \quad (3.6.34)$$

in diesem Fall erfüllt die FEDOSOV-Derivation  $\mathcal{D} = -\delta + D + \frac{i}{\lambda} \text{ad}(R)$  die Gleichung  $\mathcal{D}^2 = 0$ .

### Bemerkungen 3.6.15.

Die FEDOSOV-Konstruktion ist somit von der Wahl dreier Parameter abhängig, dem Zusammenhang  $\nabla$ , der Reihe  $\Omega$  geschlossener Zweiformen und dem Element  $s \in \mathcal{W}_3 \otimes \Lambda^0$ . Diese Größen sind allerdings nicht unabhängig voneinander. Die Wahl der untersten Ordnung von  $s$  kann als Wahl eines anderen Zusammenhangs  $\nabla'$  interpretiert werden, beziehungsweise umgekehrt kann man durch Wahl eines anderen Zusammenhangs das gleiche Sternprodukt erhalten, wenn man  $s$  in der untersten Ordnung anpaßt. Da die Zweiform auch frei wählbar ist, kann man insbesondere die Wahl  $(1 \otimes \Omega) = 0$  und  $s = 0$  treffen. Diese Wahl traf auch FEDOSOV in seiner ursprünglichen Konstruktion. Ferner kann man bei dieser Wahl eine Rekursionsformel für Gleichung (3.6.34) angeben

$$r^{(k+3)} = \delta^{-1} \left( Dr^{(k+2)} + \frac{i}{\lambda} \sum_{m=1}^{k-1} r^{(m+2)} \circ_{\text{Weyl}} r^{(k+2-m)} \right). \quad (3.6.35)$$

In der Arbeit [NEUMAIER 2001] wird gezeigt, daß man durch die Wahl verschiedener  $\Omega$  FEDOSOV-Sternprodukte in jeder möglichen Klasse konstruieren kann. Dies bedeutet insbesondere, daß jedes Sternprodukt auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit  $(M, \omega)$  äquivalent (im Sinne von Definition 3.5.1) zu einem FEDOSOV-Sternprodukt ist.

### Die Konstruktion des Sternprodukts

Wir können nun den Kern von  $\mathcal{D}$  im schiefssymmetrischen Grad 0 bestimmen. Aufgrund der Eigenschaft  $\mathcal{D}^2 = 0$  ist  $\mathcal{D}$  als eine deformierte Version von  $\delta$  aufzufassen. Im folgenden werden wir uns die Gleichung

$$\mathcal{D}\mathcal{D}^{-1} + \mathcal{D}^{-1}\mathcal{D} + \frac{1}{\text{id} - A}\sigma = \text{id} \quad \text{mit} \quad A = [\delta^{-1}, D + \frac{i}{\lambda} \text{ad}(r)] \quad (3.6.36)$$

ansetzen. Sie ist eine deformierte Version von  $\delta\delta^{-1} + \delta^{-1}\delta + \sigma = \text{id}$  und  $\mathcal{D}^{-1}$  ist gegeben durch

$$\mathcal{D}^{-1} = -\delta^{-1} \frac{1}{\text{id} - [\delta^{-1}, D + \frac{i}{\lambda} \text{ad}(r)]}, \quad (3.6.37)$$

einem wohldefinierten Endomorphismus von  $\mathcal{W} \otimes A^\bullet$ .

**Definition 3.6.16** (Die FEDOSOV-TAYLOR-Reihe).

Für die FEDOSOV-Derivation  $\mathcal{D} = -\delta + D + \frac{i}{\lambda} \text{ad}(r)$  ist die FEDOSOV-TAYLOR-Reihe definiert durch

$$C^\infty(M) [[\lambda]] \ni f \mapsto \tau(f) = \frac{1}{\text{id} - [\delta^{-1}, D + \frac{i}{\lambda} \text{ad}(r)]} f \in \mathcal{W} \quad (3.6.38)$$

**Lemma 3.6.17.**

Sei  $f \in C^\infty(M) [[\lambda]]$ , dann gilt für die FEDOSOV-TAYLOR-Reihe  $\tau(f)$

$$\sigma(\tau(f)) = f \quad (3.6.39)$$

und

$$\tau(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \delta^{-1}, D + \frac{i}{\lambda} \text{ad}(r) \right]^n f = f + \text{d}f \otimes 1 + \dots \quad (3.6.40)$$

Damit haben wir die gesuchte Bijektion zwischen  $C^\infty(M) [[\lambda]]$  und  $\ker \mathcal{D} \cap \mathcal{W}$  gefunden, die wir benötigen, um das FEDOSOV-Sternprodukt zu konstruieren.

**Satz 3.6.18** (Das FEDOSOV-Sternprodukt).

Sei  $a \in \mathcal{W}$ . Es gilt  $\mathcal{D}a = 0$  genau dann, falls  $a = \tau(\sigma(a))$ , womit  $\tau : C^\infty(M) [[\lambda]] \rightarrow \ker \mathcal{D} \cap \mathcal{W}$  eine  $\mathbb{C}[[\lambda]]$ -lineare Bijektion mit dem Inversen  $\sigma$  ist. Das Produkt

$$\begin{aligned} f \star g &= \sigma(\tau(f) \circ_{\text{Weyl}} \tau(g)) \\ &= fg + \frac{i\lambda}{2} \{f, g\} + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \quad (3.6.41)$$

ist ein differentielles und natürliches Sternprodukt, das genau dann HERMITESCH ist, falls  $\overline{\Omega} = \Omega$  und  $\overline{s} = s$  reell gewählt wurden.



### 3.6.2 Die FEDOSOV-Konstruktion auf Vektorbündeln

Im nächsten Schritt wollen wir die FEDOSOV-Konstruktion auf eine bestimmte Art von Bimoduln fortsetzen, bei dem der Bimodul ein (ggf. HERMITESCHES) Vektorbündel ist. Diese Konstruktion geht auf die Arbeiten [BURSZTYN & WALDMANN 2000] und [WALDMANN 2002] zurück. Eine Verallgemeinerung dieser Konstruktion findet man in der Diplomarbeit von WEISS [2006].

Neben dem in Definition 3.6.11 definierten Bündel aller formalen WEYL-Algebren, wollen wir noch zusätzlich die folgenden Bündel definieren. Dazu sei  $(E \xrightarrow{\pi} (M, \omega, \nabla))$  ein Vektorbündel über einer symplektischen Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang, das ebenfalls mit einem linearen Zusammenhang  $\nabla^E$  ausgestattet ist. Dieser Zusammenhang  $\nabla^E$  induziert einen Zusammenhang  $\nabla^{\text{End}(E)}$  auf dem Endomorphismenbündel über  $E$ , vergleiche Lemma A.6.10.

Wir führen im folgenden zwei neue Bündel ein

$$\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \mathcal{E} = \left( \prod_{k=0}^{\infty} \Gamma^\infty \left( S^k T^* M \otimes \Lambda^\bullet T^* M \otimes E \right) \right) [[\lambda]], \quad (3.6.42)$$

$$\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \text{End}(E) = \left( \prod_{k=0}^{\infty} \Gamma^\infty \left( S^k T^* M \otimes \Lambda^\bullet T^* M \otimes \text{End}(E) \right) \right) [[\lambda]]. \quad (3.6.43)$$

**Lemma 3.6.19** (Eigenschaften der Tensoralgebren).

- i.) Die Algebra  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \text{End}(E)$  ist assoziativ. In den ersten beiden Faktoren fällt die Struktur mit der von  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet$  zusammen, im letzten ist es die Komposition von Endomorphismen.
- ii.) Das Bündel  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \mathcal{E}$  ist ein Bimodul für  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \text{End}(E)$  von links und für  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet$  von rechts. Die Modulstrukturen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} (f \otimes \alpha \otimes A) \cdot' (g \otimes \beta \otimes s) &:= f \vee g \otimes \alpha \wedge \beta \otimes As, \\ (g \otimes \beta \otimes s) \cdot (h \otimes \gamma) &:= g \vee h \otimes \beta \wedge \gamma \otimes s. \end{aligned} \quad (3.6.44)$$

für alle  $(f \otimes \alpha \otimes A) \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \text{End}(E)$ ,  $(g \otimes \beta \otimes s) \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \mathcal{E}$  und  $(h \otimes \gamma) \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet$ .

Die Endomorphismen  $\delta$ ,  $\delta^*$  und  $\delta^{-1}$  werden auf triviale Weise auf die beiden Bündel  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \mathcal{E}$  und  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \text{End}(E)$  erweitert, indem sie auf Elementen das letzte Argument unangetastet lassen. Andersherum fassen wir die Algebra  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet$  als  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes 1$  auf und schreiben

$$\delta = (1 \otimes dx^i \otimes 1) i_s \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \quad \text{und} \quad \delta^* = (dx^i \otimes 1 \otimes 1) i_a \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \quad (3.6.45)$$

so daß wir symbolisch einen Operator für alle drei Bündel haben.

Wir wollen nun eine Deformation der Modulstruktur angeben. Dazu bedienen wir uns des auf  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet$  eingeführten WEYL-MOYAL-Produkts, und wir definieren die deformierten Modulverknüpfungen  $\circ'$  und  $\circ$  der Gleichungen (3.6.44) via

$$\begin{aligned} (f \otimes \alpha \otimes A) \circ' (g \otimes \beta \otimes s) &:= f \circ_{\text{Weyl}} g \otimes \alpha \wedge \beta \otimes As \\ (g \otimes \beta \otimes s) \circ (h \otimes \gamma) &:= g \circ_{\text{Weyl}} h \otimes \beta \wedge \gamma \otimes s. \end{aligned} \quad (3.6.46)$$

Damit und den deformierten Produkten der Algebren  $(\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \text{End}(E)$  und  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet)$  wird  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \mathcal{E}$  zu einem  $(\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \text{End}(E), \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet)$ -Bimodul bezüglich der deformierten Bimodulstrukturen  $\circ'$  und  $\circ$ .

### Kovariante Ableitungen, die FEDOSOV-Derivation $\mathcal{D}'$ und die Deformation $\star'$

Die weitere Vorgehensweise ist analog zur üblichen FEDOSOV-Konstruktion: mit Hilfe der Derivationen  $\delta, \delta^{-1}$  und eines linearen Zusammenhangs  $\nabla^{\text{End}(E)}$  auf dem Endomorphismenbündel bzw.  $\nabla^E$  auf dem Vektorbündel konstruieren wir die FEDOSOV-Derivationen  $\mathcal{D}'$  und  $\mathcal{D}^E$ , so daß deren Quadrat verschwindet. Der Kern der Superderivationen bildet dann eine Unteralgebra bzw. einen Untermodul, und der Pullback der faserweisen WEYL-MOYAL-Produkte wird dann zu einer Moduldeformation führen. In einem ersten Schritt werden wir die notwendigen Strukturen kurz erläutern, dann eine assoziative Deformation der Algebra  $\Gamma^\infty(\text{End}(E))$  betrachten und letztendlich die Modulstrukturen deformieren.

**Definition 3.6.20** (Kovariante Ableitungen  $D^E$  und  $D'$ ).

Man definiert auf dem Raum  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \mathcal{E}$  und  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \text{End}(E)$  kovariante Ableitungen, mittels

$$\begin{aligned} D^E : \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{W} \otimes \Lambda^{\bullet+1} \otimes \mathcal{E} \\ (f \otimes \alpha \otimes s) &\mapsto D(f \otimes \alpha) \otimes s + f \otimes dx^i \wedge \alpha \otimes \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^E s \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} f \otimes dx^i \wedge \alpha \otimes s + f \otimes d\alpha \otimes s + f \otimes dx^i \wedge \alpha \otimes \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^E s. \end{aligned} \quad (3.6.47)$$

und analog definiert man die kovariante Ableitung  $D' := D^{\text{End}(E)}$  auf  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \text{End}(E)$

$$\begin{aligned} D' : \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \text{End}(E) &\rightarrow \mathcal{W} \otimes \Lambda^{\bullet+1} \otimes \text{End}(E) \\ (f \otimes \alpha \otimes A) &\mapsto D(f \otimes \alpha) \otimes A + f \otimes dx^i \wedge \alpha \otimes \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^{\text{End}(E)} A \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} f \otimes dx^i \wedge \alpha \otimes A + f \otimes d\alpha \otimes A + f \otimes dx^i \wedge \alpha \otimes \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^{\text{End}(E)} A. \end{aligned} \quad (3.6.48)$$

**Lemma 3.6.21** (Eigenschaften von  $D^E$  und  $D'$ ).

Sei  $R^E$  die Krümmung des Vektorbündels  $E \xrightarrow{\pi} M$ . Die kovarianten Ableitungen  $D^E$  und  $D'$  haben die folgenden Eigenschaften:

- i.)  $D^E$  ist superderivativ bezüglich der deformierten Modulstrukturen. Sei nun  $a \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \text{End}(E)$ ,  $\Psi \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \mathcal{E}$  und  $b \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet$ , dann gilt

$$\begin{aligned} D^E(a \circ' \Psi) &= (D'a) \circ' \Psi + (-1)^{\deg_a a} a \circ' (D^E \Psi), \\ D^E(\Psi \circ b) &= (D^E \Psi) \circ b + (-1)^{\deg_a \Psi} \Psi \circ (Db), \end{aligned}$$

ii.)  $(D')^2 = \frac{i}{\lambda} \text{ad}(R - i\lambda R^E)$  und  $(D^E)^2 = \frac{i}{\lambda} \text{ad}(R) + R^E$ ,

iii.)  $\delta R^E = 0$ ,  $D'R^E = 0$ .

Die Konstruktion der FEDOSOV-Derivation  $\mathcal{D}' : \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \text{End}(E) \rightarrow \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \text{End}(E)$  verläuft komplett analog zu der Konstruktion von  $\mathcal{D}$ , und der Ansatz ist

$$\mathcal{D}' = -\delta + D' + \frac{i}{\lambda} \text{ad}(r'), \quad (3.6.49)$$

wobei  $r'$  ein Element in  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \text{End}(E)$  ist.

**Satz 3.6.22** ([FEDOSOV 1996, Sect. 5.3]).

Sei  $\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \Omega_n$  eine geschlossene Zweiform, dann existiert genau ein  $r' \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \mathcal{E}nd(E)$  mit dem schiefssymmetrischen Grad +1 und einem totalen Grad  $\geq 3$  so daß

$$\delta r' = R - i\lambda R^E + D' r' + \frac{i}{\lambda} r' \circ_{\text{Weyl}} r' + (1 \otimes \Omega \otimes 1) \quad \text{und} \quad \delta^{-1} r' = 0$$

erfüllt ist. Damit ist  $(\mathcal{D}')^2 = 0$ .

Der Unterschied zu  $\mathcal{D}$  besteht darin, daß sowohl die Krümmung des Vektorbündels  $E$  als auch die der Mannigfaltigkeit  $M$  kompensiert werden muß, was den zusätzlichen Term erklärt (vgl. hierzu Satz 3.6.14).

Mit der Projektion  $\sigma' : \ker \mathcal{D}' \cap \ker \deg_a \rightarrow \Gamma^\infty(\text{End}(E))[[\lambda]]$  und deren Umkehrabbildung  $\tau'$ , die wir auch als FEDOSOV-TAYLOR-Reihe bezeichnen, sind wir in der Lage, eine assoziative Deformation auf  $\Gamma^\infty(\text{End}(E))[[\lambda]]$  anzugeben.

**Satz 3.6.23.**

Die Abbildung  $\sigma' : \ker \mathcal{D}' \cap \ker \deg_a \rightarrow \Gamma^\infty(\text{End}(E))[[\lambda]]$  ist eine  $\mathbb{C}[[\lambda]]$ -lineare Bijektion.

Aus der Tatsache, daß der Kern einer Superderivation eine Unter algebra ist, folgt nun, daß wir das faserweise WEYL-MOYAL-Produkt  $\circ'$  auf  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \mathcal{E}nd(E)$  mittels  $\sigma'$  und  $\tau'$  auf  $\Gamma^\infty(\text{End}(E))[[\lambda]]$  zurückziehen können:

$$A \star' B = \sigma'(\tau'(A) \circ \tau'(B)), \quad (3.6.50)$$

für  $A, B \in \Gamma^\infty(\text{End}(E))[[\lambda]]$ . Damit wird  $(\Gamma^\infty(\text{End}(E))[[\lambda]], \star')$  zu einer assoziativen, deformierten Algebra.

**Bemerkung 3.6.24.**

A priori ist nicht klar, daß  $r'$  von der Form  $r' = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n r'_n$  ist, da das undeformierte Produkt auf  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \mathcal{E}nd(E)$  schon nichtkommutativ ist. Es könnten in der Rekursionsformel für  $r'$  durch den  $\frac{i}{\lambda}$ -Term beliebig viele negative Potenzen von  $\lambda$  generiert werden. Dies kann man a posteriori allerdings ausschließen. Eine genaue Betrachtung findet man in [BURSZTYN & WALDMANN 2000], die in der Kategorie der formalen LAURENT-Reihen in  $\lambda$  rechnen, jedoch a posteriori zeigen, daß keine negativen Potenzen von  $\lambda$  auftauchen.

**Die FEDOSOV-Derivation  $\mathcal{D}^E$  und die deformierten Bimodulstrukturen  $\bullet'$  und  $\bullet$**

Wir haben bislang zwei Algebren deformiert: zum einen die Funktionenalgebra  $(C^\infty(M)[[\lambda]], \star)$  und zum anderen die Schnitte im Endomorphismenbündel  $(\Gamma^\infty(\text{End}(E))[[\lambda]], \star')$ . Dabei müssen wir für die folgenden Betrachtungen beachten, daß wir in beiden Fällen dieselbe geschlossene Zweiform  $\Omega$  gewählt haben müssen, da sonst die folgende Konstruktion nicht möglich wäre.

Es liegt nun nahe, auch die Bimodulstrukturen des Bimoduls  ${}_{\Gamma^\infty(\text{End}(E))}\Gamma^\infty(E)_{C^\infty(M)}$  zu deformieren. Die wesentliche Arbeit hierzu haben wir bereits geleistet, es bleibt, eine geeignete FEDOSOV-Derivation  $\mathcal{D}^E$  sowie eine FEDOSOV-TAYLOR-Reihe  $\tau^E$  anzugeben.

Wir definieren  $\mathcal{D}^E : \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{W} \otimes \Lambda^{\bullet+1} \otimes \mathcal{E}$  mittels

$$\mathcal{D}^E = -\delta + D^E + \frac{i}{\lambda} \text{ad}(r) + r^E, \quad (3.6.51)$$

wobei  $r^E = \frac{1}{\lambda}(r' - r)$  ist.

**Satz 3.6.25** (FEDOSOV-Derivation  $\mathcal{D}^E$  und die FEDOSOV-TAYLOR-Reihe  $\tau^E$ ).

Die FEDOSOV-Derivation  $\mathcal{D}^E$  hat die folgenden Eigenschaften

i.)  $\mathcal{D}^E$  ist gradiert derivativ bezüglich der deformierten Bimodulstrukturen  $\circ'$  und  $\circ$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^E(a \circ' \Psi) &= (\mathcal{D}'a) \circ' \Psi + (-1)^{\deg_a a} a \circ' (\mathcal{D}^E \Psi), \\ \mathcal{D}^E(\Psi \circ b) &= (\mathcal{D}^E \Psi) \circ b + (-1)^{\deg_a \Psi} \Psi \circ (\mathcal{D}b),\end{aligned}\tag{3.6.52}$$

für  $a \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \text{End}(E)$ ,  $\Psi \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \mathcal{E}$  und  $b \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet$ .

ii.) Nilpotent von der Stufe 2, d. h.  $(\mathcal{D}^E)^2 = 0$ .

Desweiteren ist

$$\sigma^E : \ker \mathcal{D}^E \cap \ker \deg_a \rightarrow \Gamma^\infty(E)[[\lambda]]\tag{3.6.53}$$

eine  $\mathbb{C}[[\lambda]]$ -lineare Bijektion, deren Inverses die FEDOSOV-TAYLOR-Reihe  $\tau^E$  ist. Diese kann explizit rekursiv für ein Element  $s \in \Gamma^\infty(E)[[\lambda]]$  berechnet werden.

*Beweis.* Der Beweis hierzu findet sich in [WALDMANN 2002]. □

Damit sind wir in der Lage, auch die Bimodulstrukturen zu deformieren, und es gilt folgendes Korollar.

**Korollar 3.6.26** (Der deformierte Bimodul  $(\Gamma^\infty(\text{End}(E)[[\lambda]], \star')(\Gamma^\infty(E)[[\lambda]], \bullet', \bullet)_{(C^\infty(M)[[\lambda]], \star)}$ ).

Die Schnitte  $\Gamma^\infty(E)[[\lambda]]$  werden ein Bimodul für  $\star'$  und  $\star$  mittels

$$A \bullet' s := \sigma^E(\tau'(A) \circ' \tau^E(s)) \quad \text{und} \quad s \bullet f := \sigma^E(\tau^E(s) \circ \tau(f)),\tag{3.6.54}$$

für  $A \in \Gamma^\infty(\text{End}(E)[[\lambda]])$ ,  $s \in \Gamma^\infty(E)[[\lambda]]$  und  $f \in C^\infty(M)[[\lambda]]$ .

**Definition 3.6.27** (FEDOSOV-Bimodul).

Man nennt einen deformierten Bimodul  $(\Gamma^\infty(\text{End}(E)[[\lambda]], \star')(\Gamma^\infty(E)[[\lambda]], \bullet', \bullet)_{(C^\infty(M)[[\lambda]], \star)}$ , der mittels der FEDOSOV-Konstruktion für Vektorbündel erhalten werden kann, einen FEDOSOV-Bimodul.

Ein interessanter Fall liegt vor, wenn das Vektorbündel  $E$  ein komplexes Geradenbündel  $E = L \xrightarrow{\pi} M$  ist. Dann ist die von links wirkende Algebra  $(\Gamma^\infty(\text{End}(L)[[\lambda]], \star')$  auch eine Sternproduktalgebra, da  $\Gamma^\infty(\text{End}(L)[[\lambda]]) = C^\infty(M)[[\lambda]]$ .

**Lemma 3.6.28** (Charakteristische Klassen von  $\star'$  und  $\star$ ).

Sei  $L \xrightarrow{\pi} M$  ein Geradenbündel. Die charakteristischen Klassen der Sternprodukte  $\star'$  und  $\star$  hängen über die folgende Beziehung zusammen

$$c(\star') = c(\star) + 2\pi i c_1(L),$$

wobei  $c_1(L)$  die erste CHERN-Klasse von  $L$  ist.

### 3.6.3 $G$ -Invariante FEDOSOV-Konstruktion

Nachdem wir in Kapitel 3.6.1 die FEDOSOV-Konstruktion detailliert besprochen und in 3.6.2 eine Verallgemeinerung für Vektorbündel angegeben haben, werden wir nun durch die Wahl von speziellen Zusammenhängen (bzw. der Wahl von Klassen spezieller Zusammenhänge) und einer invarianten Zweiform in der Lage sein, unter einer LIE-Gruppe  $G$  oder unter einer LIE-Algebra  $\mathfrak{g}$  invariante Sternprodukte und Bimoduldeformationen zu konstruieren. Dabei bezeichnen wir ein Sternprodukt als  $G$ -invariant, wenn es eine Wirkung einer Gruppe  $G$  auf  $M$  gibt, so daß

$$g.(f \star h) = (g.f) \star (g.h)$$

für alle  $f, h \in C^\infty(M)[[\lambda]]$  und  $g \in G$ . Für eine detaillierte Beschreibung sowie eine ausführliche Motivation, solche Sternprodukte zu betrachten, verweisen wir auf Kapitel 4.1.

Die Möglichkeit der Konstruktion  $G$ -invarianter Sternprodukte wurde schon in [FEDOSOV 1996] erwähnt. Eine  $\mathfrak{g}$ -invariante FEDOSOV-Konstruktion geht auf die Arbeit von MÜLLER-BAHNS & NEUMAIER [2004] zurück. Die hier vorgestellte Konstruktion ist eine Verallgemeinerung, da sie eine  $G$ -invariante Formulierung der Deformation von Vektorbündeln liefert. Dazu benötigen wir auf dem Vektorbündel  $E \xrightarrow{\pi} M$  eine Wirkung, die von der  $G$ -Wirkung auf der Mannigfaltigkeit  $M$  kommt, also eine Hebung darstellt. Ist das Vektorbündel mit einer solchen  $G$ -Wirkung versehen, so erbt das Endomorphismenbündel auf kanonische Weise die Wirkung.

Die Idee der Konstruktion ist denkbar einfach: durch die Wahl  $G$ - bzw.  $\mathfrak{g}$ -invarianter Eingangsdaten, sprich einem invarianten, torsionsfreien symplektischen Zusammenhang  $\nabla$ , sowie einer invarianten symplektische Zweiform  $\omega$ , erhält man auch invariante Sternprodukte bzw. invariante Moduldeformationen. Die geometrischen Grundlagen zur  $\mathfrak{g}$ - und  $G$ -Invarianz sind in Anhang A.8 zusammengetragen.

Wir werden nun in aller Kürze die  $G$ -Invarianz der entscheidenden Strukturen aufzeigen.

**Lemma 3.6.29** (Invarianz der Endomorphismen  $\delta, \delta^*, \delta^{-1}$ ).

*Die Differentialoperatoren  $\delta$  und  $\delta^*$  sind unter einer  $G$ -Wirkung invariant. Da die  $G$ -Wirkung graderhaltend, so ist auch  $\delta^{-1}$   $G$ -invariant*

$$g.\delta(a) = \delta(g.a), \quad g.\delta^*(a) = \delta^*(g.a), \quad g.\delta^{-1}(a) = \delta^{-1}(g.a). \quad (3.6.55)$$

*Beweis.* Es sei nun  $a$  von der Form  $a = f \otimes \alpha \otimes u$ , wobei  $u$  ein Platzhalter je nach Bündel ist, d. h. wir setzen

$$a = f \otimes \alpha \otimes u := \begin{cases} f \otimes \alpha \otimes 1 & \text{für } a \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \\ f \otimes \alpha \otimes s & \text{für } a \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \mathcal{E} \\ f \otimes \alpha \otimes A & \text{für } a \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \mathcal{E}nd(E). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g.(\delta a) &= g.\left(i_s\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f \otimes dx^i \wedge \alpha \otimes u\right) \\ &= g.i_s\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f \otimes g.(dx^i \wedge \alpha) \otimes g.u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi_{g^{-1}}^* i_s \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \otimes \phi_{g^{-1}}^* (dx^i \wedge \alpha) \otimes g.u \\
&= i_s \left( \underbrace{\phi_{g^{-1}}^* i_s \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)}_{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}} \right) \underbrace{\phi_{g^{-1}}^* f}_{g.f} \otimes \underbrace{d \phi_{g^{-1}}^* x^i}_{\tilde{x}^i} \wedge \underbrace{\phi_{g^{-1}}^* \alpha}_{g.\alpha} \otimes g.u \\
&= i_s \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \right) g.f \otimes d\tilde{x}^i \wedge g.\alpha \otimes g.u \\
&= \delta(g.a)
\end{aligned}$$

Analog dazu zeigt man, daß  $g.(\delta^* a) = \delta^*(g.a)$  ist. Damit ist ebenfalls der Beweis für  $\delta^{-1}$  erbracht, falls die  $G$ -Wirkung die Grade erhält. Wie die Wirkung auf den Endomorphismen und den Schnitten wirkt haben wir in Anhang A.8 zusammengestellt.

□

**Lemma 3.6.30** (Äquivarianz des faserweisen WEYL-MOYAL-Produkts  $\circ_{\text{Weyl}}$ ).

Gegeben sei ein faserweises WEYL-MOYAL-Produkt nach Definition 3.6.7 mit einer  $G$ -invarianten POISSON-Struktur. Das faserweise WEYL-MOYAL-Produkt ist dann  $G$ -invariant, d. h. es gilt

$$g.(a \circ_{\text{Weyl}} b) = (g.a) \circ_{\text{Weyl}} (g.b). \quad (3.6.56)$$

*Beweis.* Der Beweis ist eine einfache Rechnung

$$\begin{aligned}
g.(a \circ_{\text{Weyl}} b) &= \mu \circ_{\text{Weyl}} e^{\frac{i\hbar}{2} g.\Lambda_p^{k\ell} i_s \left( g.\frac{\partial}{\partial x^k} \right) \otimes i_s \left( g.\frac{\partial}{\partial x^\ell} \right)} (g.a) \otimes (g.b) \\
&= \mu \circ_{\text{Weyl}} e^{\frac{i\hbar}{2} \tilde{\Lambda}_p^{k\ell} i_s \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} \right) \otimes i_s \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\ell} \right)} (g.a) \otimes (g.b) \\
&= (g.a) \circ_{\text{Weyl}} (g.b).
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 3.6.31.**

Natürlich ist nicht nur das faserweise WEYL-MOYAL-Produkt  $G$ -invariant, sondern aufgrund der Tensorstruktur auch die Fortsetzung auf die Bündel  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet$ ,  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \mathcal{E}$  und  $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \mathcal{E}nd(E)$ .

**Lemma 3.6.32** ( $G$ -Invarianz der kovarianten Differentiale  $D$ ,  $D'$  und  $D^E$ ).

Seien  $\nabla$  und  $\nabla^E$  unter der Gruppe  $G$ -invariante Zusammenhänge auf  $TM$  bzw.  $E \xrightarrow{\pi} M$ . Die kovarianten Differentiale  $D$ ,  $D'$  und  $D^E$  sind unter der  $G$ -Wirkung invariant.

*Beweis.* Wir rechnen nach

$$\begin{aligned}
g.(D^E \Psi) &= g.(D(f \otimes \alpha) \otimes s + f \otimes dx^i \wedge \alpha \otimes \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^E s) \\
&= g.(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} f \otimes dx^i \wedge \alpha \otimes s) + g.(f \otimes d\alpha \otimes s) + g.(f \otimes dx^i \wedge \alpha \otimes \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^E s) \\
&= g.(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} f) \otimes g.(dx^i \wedge \alpha) \otimes g.s + g.f \otimes g.d\alpha \otimes g.s + g.f \otimes g.(dx^i \wedge \alpha) \otimes g.(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^E s) \\
&= \nabla_{g.\frac{\partial}{\partial x^i}} g.f \otimes g.dx^i \wedge g.\alpha \otimes g.s + g.f \otimes dg.\alpha \otimes g.s + g.f \otimes g.dx^i \wedge g.\alpha \otimes \nabla_{g.\frac{\partial}{\partial x^i}}^E g.s \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}}^E g.f \otimes d\tilde{x}^i \wedge g.\alpha \otimes g.s + g.f \otimes dg.\alpha \otimes g.s + g.f \otimes d\tilde{x}^i \wedge \alpha \otimes \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}}^E g.s \\
&= D^E(g.\Psi).
\end{aligned}$$

Damit haben wir gleichzeitig gezeigt, daß auch  $D$  mit der Wirkung  $g$ . vertauscht, indem wir den zweiten Term der ersten Zeile „vergessen“. Da der Zusammenhang  $\nabla^{\text{End}(E)}$  auf dem Endomorphismenbündel auch invariant ist, wenn  $\nabla^E$  invariant ist (siehe Lemma A.8.15), folgt die Invarianz von  $D'$  automagisch.  $\square$

**Lemma 3.6.33** ( $G$ -Invarianz der Krümmungen  $R$  und  $R^E$ ).

Sei  $(M, \omega, \nabla)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit mit einem  $G$ -invarianten Zusammenhang, und  $(E \xrightarrow{\pi} M, \nabla^E)$  sei ein Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit  $M$  mit einem  $G$ -invarianten Zusammenhang  $\nabla^E$ . Die symplektische Krümmung  $R$  nach Definition und Lemma A.7.10 und die Krümmung  $R^E$  sind  $G$ -invariant, d. h. es gilt

$$g.R = R \quad \text{und} \quad g.R^E = R^E. \quad (3.6.57)$$

*Beweis.* Für den Beweis rechnen wir nach

$$\begin{aligned} g.(Da) &= D(g.a) \quad \text{woraus dann folgt, daß} \quad Da = g.(D(g^{-1}.a)) \\ \Rightarrow D^2a &= \frac{i}{\lambda} \text{ad}(R)(a) = g.(D^2(g^{-1}.a)) = \frac{i}{\lambda} g.(\text{ad}(R)(g^{-1}.a)) = \frac{i}{\lambda} \text{ad}(g.R)(a) \end{aligned} \quad (3.6.58)$$

Daraus folgt unmittelbar, daß  $R - g.R$  zentral ist. Da andererseits für den symmetrischen Grad  $\deg_s(R - g.R) = 2(R - g.R)$  gilt, muß  $R - g.R = 0$  sein. Analog verhält es sich für  $R^E$ . Nach Lemma 3.6.21 gilt

$$(D')^2 = \frac{i}{\lambda} \text{ad}(R - i\lambda R^E) \quad \text{und} \quad (D^E)^2 = \frac{i}{\lambda} \text{ad}(R) + R^E. \quad (3.6.59)$$

Mit einer zu Rechnung (3.6.58) analogen Betrachtung ergibt sich die Behauptung.  $\square$

Wir gehen nun davon aus, daß sowohl das Element  $s \in \mathcal{W}_3 \otimes \Lambda^0$  als auch die geschlossene Zweiform  $\Omega \in \Lambda^2 T^*M$   $[[\lambda]]$  invariant unter der  $G$ -Wirkung ist, d. h. es gilt

$$g.s = s \quad \text{und} \quad g.\Omega = \Omega \quad (3.6.60)$$

Solche finden wir natürlich immer, da wir insbesondere  $s = 0$  und  $\Omega = 0$  wählen können. Wir wählen  $s = 0$ , dann gilt  $0 = g.(\delta^{-1}r) = \delta^{-1}(g.r)$ . Für das Element  $r$  ist somit

$$\begin{aligned} \delta(g.r) &= g.(\delta r) = g.(Dr) + \frac{i}{\lambda} g.(r \circ_{\text{Weyl}} r) + g.R + g.(1 \otimes \Omega \otimes 1) \\ &= D(g.r) + \frac{i}{\lambda} (g.r \circ_{\text{Weyl}} g.r) + g.R + (1 \otimes g.\Omega \otimes 1) \\ &= D(g.r) + \frac{i}{\lambda} (g.r \circ_{\text{Weyl}} g.r) + R + (1 \otimes \Omega \otimes 1), \end{aligned}$$

woraus aufgrund der Eindeutigkeit  $g.r = r$  folgt. Analog verfahren wir mit  $r'$ , und damit haben wir auch die Invarianz von  $r^E$  geschenkt bekommen.

Nun sind wir in der Lage die  $G$ -Invarianz der FEDOSOV-Derivationen  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}'$  und  $\mathcal{D}^E$  zu zeigen.

**Lemma 3.6.34** ( $G$ -Invarianz der FEDOSOV-Derivationen  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}'$  und  $\mathcal{D}^E$ ).

Die FEDOSOV-Derivationen  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}'$  und  $\mathcal{D}^E$  sind  $G$ -invariant.

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
g.(\mathcal{D}b) &= -g.(\delta b) + g.(Db) + \frac{i}{\lambda}g.(\text{ad}(r)b) \\
&= -\delta(g.b) + D(g.b) + \frac{i}{\lambda}\text{ad}(g.r)(g.b) \\
&= -\delta(g.b) + D(g.b) + \frac{i}{\lambda}\text{ad}(r)(g.b) \\
&= \mathcal{D}(g.b)
\end{aligned}$$

Analog dazu zeigt man  $g.(\mathcal{D}'a) = \mathcal{D}'(g.a)$  und  $g.(\mathcal{D}^E\Psi) = \mathcal{D}^E(g.\Psi)$ .  $\square$

**Satz 3.6.35** ( $G$ -invariantes FEDOSOV-Sternprodukt  $\star$ ).

Gegeben eine symplektische  $G$ -Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang  $(M, \omega, G, \nabla)$ . Das resultierende FEDOSOV-Sternprodukt  $\star_{(\nabla, \Omega, s)}$  ist genau dann  $G$ -invariant, falls die symplektische Zweiform  $\omega$ , der Zusammenhang  $\nabla$ , sowie die geschlossene Zweiform  $\Omega$  und das Element  $s$  auch  $G$ -invariant gewählt wurden, und es gilt

$$g.(a \star_{(\nabla, \Omega, s)} b) = (g.a) \star_{(\nabla, \Omega, s)} (g.b). \quad (3.6.61)$$

*Beweis.* Der Beweis ist nach der gemachten Vorarbeit nicht weiter schwierig. Wie bereits gezeigt vertauscht  $\mathcal{D}$  mit allen  $g \in G$ . Daraus folgt nun

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(g.(\tau(f))) &= g.(\mathcal{D}\tau(f)) = 0 \\
\Rightarrow g.\tau(f) &= \tau(g.f), \quad \text{da} \quad \sigma(g.\tau(f)) = g.f.
\end{aligned}$$

Und damit ist

$$\begin{aligned}
g.(f \star_{(\nabla, \Omega, s)} h) &= g.(\sigma(\tau(f) \circ_{\text{Weyl}} \tau(h))) \\
&= \sigma(g.(\tau(f) \circ_{\text{Weyl}} \tau(h))) \\
&= \sigma(g.\tau(f) \circ_{\text{Weyl}} g.\tau(h)) \\
&= \sigma(\tau(g.f) \circ_{\text{Weyl}} \tau(g.h)) \\
&= (g.f) \star_{(\nabla, \Omega, s)} (g.h).
\end{aligned} \quad (3.6.62)$$

$\square$

**Satz 3.6.36** ( $G$ -äquivarianter deformierter Bimodul).

Sei  $G$  eine Gruppe,  $(M, \omega, G, \nabla)$  eine symplektische  $G$ -Mannigfaltigkeit mit einem  $G$ -invarianten Zusammenhang  $\nabla$ . Desweiteren sei  $(E \xrightarrow{\pi} M, G, \nabla^E)$  ein  $G$ -Bündel mit einem  $G$ -invarianten Zusammenhang  $\nabla^E$ . Ist nun  $\Omega$  eine  $G$ -invariante geschlossene Zweiform, so ist der daraus konstruierte FEDOSOV-Bimodul  $(\mathcal{E}, \bullet', \bullet)$   $G$ -äquivariant.

*Beweis.* Der Beweis geschieht vollständig analog zu dem von Satz 3.6.35. Aufgrund der Invarianz von  $\mathcal{D}'$  und  $\mathcal{D}^E$  sowie der Bündeldeformationen  $\circ'$  und  $\circ$  folgt analog zur Rechnung (3.6.62)

$$g.(A \star' B) = (g.A) \star' (g.B), \quad g.(A \bullet' s) = (g.A) \bullet' (g.s), \quad g.(s \bullet f) = (g.s) \bullet (g.f) \quad (3.6.63)$$

für  $A, B \in \Gamma^\infty(\text{End}(E))[[\lambda]]$ ,  $s \in \Gamma^\infty(E)[[\lambda]]$  und  $f \in C^\infty(M)[[\lambda]]$ .  $\square$



**Bemerkungen 3.6.37.**

- i.)* Analog zu der hier behandelten  $G$ -Invarianz kann man auch die unter einer LIE-Algebra  $\mathfrak{g}$ -äquivalente FEDOSOV-Konstruktion betrachten [MÜLLER-BAHNS & NEUMAIER 2004].
- ii.)* Die hier gemachte Konstruktion für Sternprodukte oder die Bimoduln ist sehr kanonisch, und scheinbar ist es einfach, einen  $\mathfrak{g}$ - oder  $G$ -äquivalenten deformierten FEDOSOV-Bimodul zu konstruieren. Das Problem besteht darin, invariante Zusammenhänge auf der Mannigfaltigkeit bzw. auf dem Vektorbündel zu finden. Im allgemeinen ist dies sehr schwierig und nicht immer möglich. Wir werden dieses Problem in Anhang A.8 aufgreifen und einige Fälle angeben, in denen es immer invariante Zusammenhänge (und damit invariante Sternprodukte und Bimoduln) gibt.



## Kapitel 4

# $H$ -Äquivarianz und MORITA-Äquivalenz deformierter Algebren

### 4.1 Invariante und $H$ -äquivariante Sternprodukte

#### 4.1.1 Motivation und erste Beispiele

In diesem Kapitel wollen wir einige Motivationen und Grundlagen geben, Sternprodukte anzugeben, die unter einer später näher beschriebenen Wirkung invariant sind.

Die Motivation liegt auf der Hand, denn in der Physik spielen Invarianzen unter (LIE-) Gruppen- bzw. LIE-Algebrenwirkungen eine wichtige Rolle [MARSDEN & RATIU 2000].

- i.) Symmetrien* spielen in der klassischen wie in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle. Symmetrien und Erhaltungsgrößen sind eng miteinander verknüpft, da (unter „günstigen“ Voraussetzungen) jede Symmetrie eines Systems einer Erhaltungsgröße entspricht [NOETHER 1918]. Die naheliegenden Beispiele sind *Translationsinvarianz*, *Rotationsinvarianz* und *Homogenität der Zeit*, die *Impulserhaltung*, *Drehimpulserhaltung* und *Energieerhaltung* zur Folge haben.
- ii.) Zwangsbedingungen* bzw. *Constraints*<sup>1</sup> sind äußere Zwänge auf ein physikalisches System. Diese sind häufig geometrischer Natur und schränken den Konfigurationsraum (und damit auch den Phasenraum) ein. Durch diese Einschränkungen ist es in der klassischen wie in der Quantenmechanik oft möglich den anfänglich „großen“ Phasenraum zu verkleinern. Dies geschieht mittels *Phasenraumreduktion*, was mathematisch dem Übergang von einem symplektischen Phasenraum  $(M, \omega)$  zu einem reduzierten, d. h. niedrigerdimensionalen  $(M_{\text{red}}, \omega_{\text{red}})$  entspricht. Siehe hierzu [ABRAHAM & MARSDEN 1985; MARSDEN & RATIU 1999] und für den Fall von Mannigfaltigkeiten mit Sternprodukten [BORDEMAN *et al.* 1996, 2000; KOWALZIG *et al.* 2004; BORDEMAN 2004; BORDEMAN *et al.* 2005]. Wir wollen einige Beispiele für die Phasenraumreduktion angeben.

---

<sup>1</sup>Der Unterschied zwischen Zwangsbedingungen und Constraints ist, daß erstere sich insbesondere auf den Ortsraum beziehen, also Bedingungen an Orte stellen, letztere jedoch auf Einschränkungen im Phasenraum. Diese subtile Unterscheidung wird oft dadurch hervorgehoben, daß man auch von *Phasenraum-Constraints* spricht.

- (a) Ein starrer Körper im  $\mathbb{R}^3$ . Dessen Konfigurationsraum ist  $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$ . Der Phasenraum ist damit  $T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)) = T^*\mathbb{R}^3 \times T^*\mathrm{SO}(3)$ . Fixiert man den Schwerpunkt und spaltet die Translationen ab, so ist der Phasenraum  $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$ .
- (b) Ein (starres) Pendel im Schwerfeld. Der ursprüngliche Konfigurationsraum  $\mathbb{R}^3$  wird durch die Zwangsbedingung zu  $S^2$  reduziert, der Phasenraum ist damit  $T^*S^2$ .
- iii.) *Eichfreiheit* ist eine spezielle (da physikalisch unbeobachtbare) Art der Constraints, die insbesondere in der Feldtheorie auftritt. Auch hier spielen Wirkungen von LIE-Gruppen und LIE-Algebren eine wesentliche Rolle.

Wir wollen uns nun ansehen, wie man Symmetrien in den Sternproduktformalismus implementiert. Dazu werden wir einige Definitionen und bekannte Beispiele angeben, sowie das verallgemeinernde Konzept der HOPF-Algebrawirkung implementieren.

**Definition 4.1.1** (Invariante Sternprodukte).

Sei  $\Phi : M \rightarrow M$  ein Diffeomorphismus der symplektischen Mannigfaltigkeit  $(M, \omega, \star)$ . Wir nennen das Sternprodukt

- i.) invariant unter  $\Phi$ , falls  $\Phi^*(f \star g) = (\Phi^*f) \star (\Phi^*g)$  für alle  $f, g \in C^\infty(M) [[\lambda]]$ .
- ii.) quanteninvariant, falls es eine formale Reihe  $T = \mathrm{id} + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r T_r$  von Differentialoperatoren<sup>2</sup>  $T_r$  gibt, so daß  $\Phi^* \circ T$  ein Automorphismus von  $\star$  ist.

**Beispiel 4.1.2** (Invarianz des WICK-Produkts, [WALDMANN 1995]).

Das WICK-Produkt im  $\mathbb{C}^n$  ist unter der kanonischen  $\mathrm{U}(n)$ -Wirkung invariant, da die Gruppe  $\mathrm{U}(n)$  symplektisch durch Matrixmultiplikation auf  $\mathbb{C}^n$  operiert:  $\Phi_U z = Uz$ , wobei  $U \in \mathrm{U}(n)$  ist.

Die Begriffe der Invarianz und der Quanteninvarianz sind allerdings noch zu wenig restriktiv. Durch das Einführen bzw. der Suche nach *Impulsabbildungen* können wir die Freiheitsgrade reduzieren. Dazu orientieren wir uns an Arbeiten von ARNAL *et al.* [1983], BORDEMANN *et al.* [2000] und GUTT & RAWNSLEY [2003]. Eine ausführliche Beschreibung zu klassischen Impulsabbildungen findet man in [ABRAHAM & MARSDEN 1985].

**Definition 4.1.3** (Invariante Sternprodukte und Impulsabbildung).

Gegeben eine symplektische Mannigfaltigkeit  $(M, \omega, \star)$  mit Sternprodukt. Desweiteren sei eine  $\mathrm{ad}^*$ -invariante Impulsabbildung  $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  gegeben. Man nennt das Sternprodukt  $\star$

- i.) invariant, falls für alle  $f, g \in C^\infty(M) [[\lambda]]$  und  $\xi \in \mathfrak{g}$  gilt

$$\{\langle J, \xi \rangle, f \star g\} = \{\langle J, \xi \rangle, f\} \star g + f \star \{\langle J, \xi \rangle, g\} \quad (4.1.1)$$

- ii.) äquivariant, falls für alle  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$  gilt

$$\langle J, \xi \rangle \star \langle J, \eta \rangle - \langle J, \eta \rangle \star \langle J, \xi \rangle = i\lambda \{\langle J, \xi \rangle, \langle J, \eta \rangle\} = i\lambda \langle J, [\xi, \eta] \rangle. \quad (4.1.2)$$

- iii.) stark invariant, falls für alle  $\xi \in \mathfrak{g}$  und  $f \in C^\infty(M) [[\lambda]]$  gilt

$$\langle J, \xi \rangle \star f - f \star \langle J, \xi \rangle = i\lambda \{\langle J, \xi \rangle, f\}. \quad (4.1.3)$$

<sup>2</sup>Im allgemeinen müssen die  $T_r$  keine Differentialoperatoren sein, da wir uns aber auf differentielle Sternprodukte beschränken, ist dies automatisch gegeben.

iv.) quantenäquivalent, falls es glatte Abbildungen  $\mathbf{J}_n : M \rightarrow \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{C}$  mit  $\mathbf{J}_0 = J$  gibt, so daß für die Quantenimpulsabbildung  $\mathbf{J} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathbf{J}_n$  und für alle  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$  gilt

$$\langle \mathbf{J}, \xi \rangle \star \langle \mathbf{J}, \eta \rangle - \langle \mathbf{J}, \eta \rangle \star \langle \mathbf{J}, \xi \rangle = i\lambda \langle \mathbf{J}, [\xi, \eta] \rangle. \quad (4.1.4)$$

Dabei ist  $\langle J, \xi \rangle$  (bzw.  $\langle \mathbf{J}, \xi \rangle$ ) die natürliche Paarung mit Werten in  $C^\infty(M)$  (bzw.  $C^\infty(M)[[\lambda]]$ ), und wir schreiben auch  $\langle J, \xi \rangle =: J_\xi$  (bzw.  $\langle \mathbf{J}, \xi \rangle =: \mathbf{J}_\xi$ ).

**Bemerkung 4.1.4** (Äquivarianz und Kovarianz).

Die Begriffe *äquivalent* und *kovariant* meinen im Zusammenhang mit Gruppenwirkungen dasselbe und werden in der Literatur synonym verwendet. Wir haben uns bemüht in dieser Arbeit ausschließlich den Ausdruck *äquivalent* zu verwenden, auch wenn in der jeweils angegebenen Literatur der Begriff *kovariant* verwendet wurde.

Im Rahmen der Deformationsquantisierung ist die Quantenäquivarianz in gewisser Hinsicht die „natürlichste“ Art, da sie die kategoriell besten Eigenschaften hat. Da bei der Quantenäquivarianz, aufgrund der höheren Ordnungen in  $\lambda$ , mehr Freiheitsgrade zur Verfügung stehen, ist sie erstmal weniger restriktiv als die Äquivarianz oder die starke Invarianz. Jedoch gibt es für die Existenz von Quantenimpulsabbildungen keine Beweise. Nichtsdestotrotz werden wir uns im Rahmen der HOPF- $\ast$ -Algebren im wesentlichen mit der Quantenäquivarianz auseinandersetzen. Dazu werden wir im folgenden Kapitel auf den Begriff der Impulsabbildung zurückgreifen, den wir bereits in Kapitel ?? eingeführt haben.

### 4.1.2 Formulierung mittels HOPF-Algebra Techniken

In diesem Kapitel werden wir das algebraische Konzept der HOPF-Algebren nutzen, um einen geeigneten Begriff der Invarianz im Rahmen von deformierten Algebren und insbesondere Sternprodukten zu formulieren. Als Beispiele werden die Gruppenalgebra einer Gruppe sowie die universell Einhüllende einer LIE-Algebra dienen, die wir durch diese Formulierung gemeinsam behandeln können. Desweiteren sind wir in der Lage eine weitere Klasse von Symmetrien, die als *Quantengruppen* oder  *$q$ -deformierte Gruppen* in der Literatur zu finden sind [MAJID 1995; KASSEL 1995], zu behandeln. Die  $q$ -deformierten HOPF-Algebren sind dann im Gegensatz zur universell Einhüllenden einer LIE-Algebra oder der Gruppenalgebra nicht mehr *kokommutativ* (vgl. Beispiel A.2.27).

Die Notation und die wichtigsten Definitionen und Sätze bezüglich HOPF-Algebren sind in Anhang A.2 zusammengetragen.

### 4.1.3 Erste Definitionen und Beispiele

#### $H$ -invariante Sternprodukte

**Definition 4.1.5** ( $H$ -Invariantes Sternprodukt).

Gegeben eine POISSON-Mannigfaltigkeit  $(M, \Lambda, \star)$  mit einem Sternprodukt nach Definition 3.4.8 und einer HOPF-Algebra  $H$  mit einer Wirkung  $\triangleright$  auf der Funktionenalgebra  $C^\infty(M)$  (beziehungsweise auf  $C^\infty(M)[[\lambda]]$  durch summandenweises Fortsetzen). Das Sternprodukt  $\star$  ist  $H$ -invariant unter der Wirkung  $\triangleright$  (oder auch invariant unter einer Wirkung  $\triangleright$  von  $H$ ), falls  $(H, (C^\infty(M)[[\lambda]], \star), \triangleright)$

eine  $H$ -Linksmodulalgebra nach Definition A.2.28 ist. Insbesondere gilt für alle  $h \in H$  und  $f, g \in C^\infty(M) [[\lambda]]$

$$h \triangleright (f \star g) = (h_{(1)} \triangleright f) \star (h_{(2)} \triangleright g). \quad (4.1.5)$$

Die beiden wichtigen Beispiele sind die Wirkung von LIE-Gruppen und LIE-Algebren.

**Beispiel 4.1.6** (Wirkung einer Gruppe  $G$  via Automorphismen).

Sei  $G$  nun eine LIE-Gruppe. Die Gruppe  $G$  wirkt via Automorphismen  $\phi_g^* : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  und  $g \in G$  auf die Algebra  $(C^\infty(M) [[\lambda]], \star)$ . Um dies in Termen einer HOPF-Algebra zu formulieren, müssen wir zur Gruppenalgebra  $\mathbb{C}(G)$  übergehen (siehe Beispiel A.2.24). Da  $\phi_g$  ein Diffeomorphismus von  $M$  ist, entspricht dies natürlich genau der Definition eines invarianten Sternprodukts aus Definition 4.1.1.

$$\phi_g^*(a \star b) = (\phi_g^* a) \star (\phi_g^* b) \quad \text{für } a, b \in C^\infty(M) [[\lambda]]. \quad (4.1.6)$$

**Beispiel 4.1.7** (Wirkung einer LIE-Algebra  $\mathfrak{g}$  via Derivationen).

Analog zu Beispiel 4.1.6 kann man die LIE-Algebrawirkung  $\mathcal{L}_\xi : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , die nicht notwendigerweise von einer Gruppe  $G$  kommen muß, mit  $\xi \in \mathfrak{g}$  als HOPF-Algebrawirkung ansehen. Die LIE-Algebra stellt dabei selbst noch keine HOPF-Algebra dar, allerdings deren universell Einhüllende  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  (Beispiel A.2.25). Die Wirkung wird dann zu

$$\mathcal{L}_\xi(a \star b) = (\mathcal{L}_\xi a) \star b + a \star (\mathcal{L}_\xi b) \quad \text{für } a, b \in C^\infty(M) [[\lambda]]. \quad (4.1.7)$$

Kommt die LIE-Algebra von einer LIE-Gruppe  $G$ , ist also  $\mathfrak{g} = T_e G$ , so ist die Wirkung offensichtlich die infinitesimale Version der Gruppenwirkung. Ferner sieht man, daß die Definition 4.1.5 im LIE-Algebrafall mit  $\mathcal{L}_\xi(\cdot) = \{\langle J, \xi \rangle, \cdot\}$  der ursprünglichen in Definition 4.1.3 entspricht, sofern ein  $J$  existiert.

Bei den Beispielen 4.1.6 und 4.1.7 sind die beiden HOPF-Algebren jeweils kokommutativ.

**Lemma 4.1.8** (Triviale Wirkung einer HOPF-Algebra).

Gegeben sei eine POISSON-Mannigfaltigkeit mit Sternprodukt  $(M, \Lambda, \star)$  und eine beliebige HOPF-Algebra  $H$ . Wirkt die HOPF-Algebra über  $\mathbb{C}$  trivial (nach Beispiel A.2.30), so ist das Sternprodukt unter dieser Wirkung invariant.

*Beweis.* Es gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} h \triangleright (f \star g) &= \varepsilon(h)(f \star g) \\ &= \varepsilon(h_{(1)} \varepsilon(h_{(2)}))(f \star g) \\ &= (\varepsilon(h_{(1)})f) \star (\varepsilon(h_{(2)})g) \\ &= (h_{(1)} \triangleright f) \star (h_{(2)} \triangleright g), \end{aligned}$$

so daß jede HOPF-Algebra  $H$  durch die triviale Wirkung auf ein gegebenes Sternprodukt wirkt.  $\square$

### Impulsabbildung und $H$ -äquivalente Sternprodukte

Nun wollen wir Definition 4.1.3 auf den Fall der Wirkung einer HOPF- $*$ -Algebra auf HERMITESche Sternprodukte erweitern<sup>3</sup>.

Sei nun  $\mathcal{A}$  eine kommutative  $*$ -Algebra über dem Ring  $\mathbb{C}$  (wir denken natürlich insbesondere an  $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ ) und  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}[[\lambda]], \star)$  sei eine HERMITESche Deformation von  $\mathcal{A}$ . Sei weiter  $H$  eine HOPF- $*$ -Algebra über dem Ring  $\mathbb{C}$ .

Wir wollen nun untersuchen wann wir eine *innere Wirkung* der HOPF- $*$ -Algebra auf die deformierte Algebra  $\mathcal{A}$  finden können. Das besondere Interesse an innere Wirkungen ist durch die Quantenmechanik motiviert, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiele 4.1.9** (Innere Wirkungen einer LIE-Gruppe).

Sei  $G$  eine LIE-Gruppe. Wir betrachten die HOPF- $*$ -Algebra  $H = \mathbb{C}[G]$  mit der üblichen Koalgebrastruktur (vgl. A.2.24). Diese wirkt mittels innerer Automorphismen auf die  $*$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$  der beschränkten Operatoren auf einem HILBERT-Raum  $\mathfrak{H}$

$$U : \mathbb{C}[G] \ni g \mapsto U_g \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}).$$

Die innere Wirkung wird dann zu  $g \triangleright : \mathcal{B}(\mathfrak{H}) \ni A \mapsto U_g A U_g^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$  und  $(\mathbb{C}[G], \mathcal{B}(\mathfrak{H}), \triangleright)$  ist eine  $\mathbb{C}[G]$ -Linksmodulalgebra.

Bei der Formulierung wollen wir uns einer Impulsabbildung bedienen, wie wir sie bereits in Kapitel ?? eingeführt haben. Mit Hilfe der Impulsabbildung  $J : H \rightarrow \mathcal{A}$  können wir eine innere  $*$ -Wirkung auf einer  $*$ -Algebra definieren. Diese ist, wie wir in Lemma ?? gezeigt haben, gegeben durch

$$h \triangleright a := J(h_{(1)}) \cdot a \cdot J(S(h_{(2)})).$$

Auf der undeformierten, kommutativen Algebra  $\mathcal{A}$  ist diese Wirkung trivial, wie wir in Korollar ?? gezeigt haben. Genau dies wird uns bei der Formulierung einer inneren Wirkung auf der deformierten Algebra  $(\mathcal{A}[[\lambda]], \star)$  noch Probleme einbringen.

Sei im weiteren

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n J_n : H \rightarrow (\mathcal{A}[[\lambda]], \star) \quad (4.1.8)$$

eine Impulsabbildung. Nach Definition 4.1.3 handelt es sich bei dieser Definition um eine *Quantenimpulsabbildung*, jedoch ist diese Definition mit unserer Definition ?? konsistent, da es sich bei einer HERMITESchen Deformation  $(\mathcal{A}[[\lambda]], \star)$  um eine  $*$ -Algebra handelt. Für die in der klassischen Mechanik gebräuchliche Impulsabbildung wollen wir auf [ABRAHAM & MARSDEN 1985] verweisen, für einen tieferen Einblick in die Quantenimpulsabbildungen im Sinne von Definition 4.1.3 auf die Arbeiten [XU 1998; BORDEMAN *et al.* 2000; MÜLLER-BAHNS & NEUMAIER 2004].

Die Frage, die sich uns nun stellt, ist: *Welche HOPF-Algebren können eine (nichttriviale) innere Wirkung für eine deformierte kommutative Algebra liefern?* Das heißt, können wir für eine gegebene HOPF-Algebra eine Impulsabbildung  $J : H \rightarrow (\mathcal{A}[[\lambda]], \star)$  finden, so daß wir mit Hilfe dieser

---

<sup>3</sup>Im Fall von nicht-HERMITESchen Sternprodukten kann auf die  $*$ -Struktur verzichtet werden, da diese nicht essentiell für die Definition von  $H$ -Äquivalenz ist. Desweiteren kann man in diesem Fall auch HOPF-Algebren ohne  $*$ -Struktur verwenden

eine innere Wirkung auf der deformierten Algebra bekommen? Wie bereits erwähnt wird uns die Kommutativität der untersten Ordnung dabei Probleme bereiten. Die naive Idee, daß die Gruppenalgebra  $\mathbb{C}[G]$  oder die universell Einhüllende einer LIE-Algebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  eine Symmetrie eines Sternprodukts sein könnten, scheitert bereits im Ansatz, wie wir in den folgenden Gegenbeispielen zeigen.

**Beispiel 4.1.10** (Gegenbeispiel 1: Gruppenalgebra  $\mathbb{C}[G][[\lambda]]$ ).

Sei nun  $\mathcal{A}$  eine kommutative Algebra und  $\Phi : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A})$ . Da  $\mathcal{A}$  kommutativ ist, ist  $\text{Aut}(\mathcal{A}) = \text{OutAut}(\mathcal{A})$ . Desweiteren sei  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}[[\lambda]], \star)$  ein Sternprodukt, und  $\Phi : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A}[[\lambda]], \star)$  eine deformierte Wirkung, so daß  $g \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_g^{(n)}$  mit  $\Phi_g^{(0)} = \Phi_g$ . Es ist nun einfach zu zeigen, daß es kein  $U_g \in \mathcal{A}$  geben kann, so daß sich die Wirkung mit  $\Phi$  als eine innere Wirkung der Form  $\Phi_g = \text{Ad}_*(U_g)$  schreiben lassen kann. Da die unterste Ordnung der Algebra  $\mathcal{A}$  kommutativ ist, muß  $\Phi_g^{(0)} = \text{id}$  sein. Da die Wirkung auf die undeformierte Algebra  $\mathcal{A}$  ein beliebiger Automorphismus der Algebra ist, kann die Wirkung auf die deformierte Algebra kein innerer Automorphismus sein. Damit ist klar, daß die HOPF-Algebra  $H = \mathbb{C}[G][[\lambda]]$  keine innere (wohl jedoch eine äußere) Symmetrie für ein Sternprodukt sein kann.

**Beispiel 4.1.11** (Gegenbeispiel 2: Universell einhüllende Algebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\lambda]]$ ).

Analog zu Beispiel 4.1.10 verläuft die Überlegung im Fall einer formalen Potenzreihe der universell einhüllenden Algebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\lambda]]$  einer LIE-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Wieder sei  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}[[\lambda]], \star)$  ein Sternprodukt. Mit der üblichen Koalgebrastruktur  $\Delta(\xi) = 1 \otimes \xi + \xi \otimes 1$  und mit  $S(\xi) = -\xi$  ergibt sich für eine innere Wirkung

$$J(\xi_{(1)}) \star J(\eta) \star J(S(\xi_{(2)})) = J(\xi) \star J(\eta) - J(\eta) \star J(\xi).$$

Da die unterste Ordnung in der Algebra  $(\mathcal{A}[[\lambda]], \star)$  kommutativ ist, ist der gesamte Ausdruck von der Ordnung  $\mathcal{O}(\lambda)$ . Andererseits muß  $J$  ein  $\ast$ -Homomorphismus sein, so daß

$$J(\xi) \star J(\eta) - J(\eta) \star J(\xi) = J([\xi, \eta]).$$

Dies führt aber zu einem Widerspruch, denn  $J([\xi, \eta])$  ist im allgemeinen von der Ordnung  $\mathcal{O}(1)$ . Somit kann auch die formale Potenzreihe einer universell einhüllenden Algebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\lambda]]$  einer LIE-Algebra im allgemeinen keine Symmetrie eines Sternprodukts sein.

Wir wollen nun eine HOPF-Algebra angeben, die eine Symmetrie eines Sternprodukts sein kann. Dazu betrachten wir die folgende Konstruktion nach GUTT [1983]:

$$\mathcal{U}_\lambda(\mathfrak{g}) := T_{\mathbb{C}}^\bullet(\mathfrak{g})[[\lambda]] / \langle \xi \otimes \eta - \eta \otimes \xi - \lambda[\xi, \eta] \rangle. \quad (4.1.9)$$

Dabei ist  $T_{\mathbb{C}}^\bullet(\mathfrak{g})[[\lambda]]$  die formale Potenzreihe der komplexifizierten Tensoralgebra einer LIE-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Elemente in  $\mathcal{U}_\lambda(\mathfrak{g})$  können wir aufgrund des Quotienten nicht explizit als formale Potenzreihen schreiben. Als HOPF-Algebra interpretiert ist  $\mathcal{U}_\lambda(\mathfrak{g})$  mit den gewöhnlichen HOPF-Strukturen  $(\mathcal{U}_\lambda(\mathfrak{g}), \cdot, \eta, \Delta, \varepsilon, S, \ast)$  ausgestattet. Von GUTT [1983] wurde mit dem Satz von POINCARÉ-BIRKHOFF-WITT gezeigt, daß diese Algebra kanonisch isomorph zu  $(\text{Pol}^\bullet(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]], \star_{\mathbb{C}})$  ist und wir bezeichnen mit  $\star_{\mathbb{C}}$  das GUTT-Sternprodukt. Auf kanonische Weise wird  $H_{\mathbb{C}} = (\text{Pol}^\bullet(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]], \star_{\mathbb{C}}, \eta, \Delta, \varepsilon, S, \ast)$  zu einer HOPF- $\ast$ -Algebra mit  $\Delta(\xi) = \xi \otimes 1 + 1 \otimes \xi$ ,  $\varepsilon(\xi) = 0$  und  $S(\xi) = -\xi$ .



Damit haben wir nun eine HOPF- $\star$ -Algebra gefunden, so daß die Impulsabbildung

$$J : H_G \rightarrow (\mathcal{A}[[\lambda]], \star) \quad (4.1.10)$$

ein – im HOPF- $\star$ -Algebra Sinne – innerer  $\star$ -Homomorphismus sein kann. Denn für  $\xi, \eta \in \text{Pol}^\bullet(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]$  gilt:

$$\begin{aligned} J(\xi_{(1)}) \star J(\eta) \star J(S(\xi_{(2)})) &= J(\xi) \star J(\eta) - J(\eta) \star J(\xi) \\ &= i\lambda J([\xi, \eta]). \end{aligned}$$

Dies entspricht der Definition eines quantenäquivalenten Sternprodukts in Definition 4.1.3.

## 4.2 Deformation von projektiven Moduln

In diesem Abschnitt wollen wir nur die wichtigsten Ergebnisse kurz aufgreifen und keine tiefgehenden Beweise führen. Statt dessen verweisen wir an den betreffenden Stellen auf geeignete Artikel. Nun wollen wir im Rahmen von deformierten Algebren über starke MORITA-Äquivalenz,  $\star$ -MORITA-Äquivalenz und MORITA-Äquivalenz reden. Dies bedeutet, daß wir nun HERMITESCHE, formal deformierte  $\star$ -Algebren nach Definition 3.4.1 betrachten. Im weiteren sei  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}[[\lambda]], \star)$  eine HERMITESCHE, deformierte Algebra mit Einselement über einem Ring  $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ , wobei  $\mathbb{R}$  geordnet sei (wir denken insbesondere natürlich an  $\mathbb{R}[[\lambda]]$  und  $\mathbb{C}[[\lambda]]$ ). Die folgenden bekannten Ergebnisse findet man beispielsweise in [BURSZTYN & WALDMANN 2000; BURSZTYN 2001].

**Lemma 4.2.1** (Deformierter Projektor).

Sei  $M_n(\mathcal{A}) \ni P_0 = P_0^2$  ein idempotentes Element, dann existiert ein idempotentes  $M_n(\mathcal{A}) \ni \mathbf{P} = P_0 + \mathcal{O}(\lambda)$ . Ist desweiteren  $P_0 = P_0^2 = P_0^*$  ein Projektor, so kann man ein  $\mathbf{P} \in M_n(\mathcal{A})$  wählen, das ebenso ein Projektor ist, d. h. es gilt  $\mathbf{P} = \mathbf{P} \star \mathbf{P} = \mathbf{P}^*$ .

*Beweis.* Der Beweis findet sich in [GERSTENHABER & SCHACK 1990; FEDOSOV 1996]. Insbesondere kann man eine explizite Formel für einen deformierten Projektor angeben [FEDOSOV 1996, Eq. (6.1.4)]

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} + \left( P_0 - \frac{1}{2} \right) \star \frac{1}{\sqrt[4]{1 + 4(P_0 \star P_0 - P_0)}}, \quad (4.2.1)$$

der genau die geforderten Eigenschaften hat. □

**Bemerkung 4.2.2** (Deformierter Projektor).

Der Nenner in des deformierten Projektors  $\mathbf{P}$  in Gleichung (4.2.1) ist wohldefiniert. Die unterste Ordnung des Sternprodukts  $P_0 \star P_0 - P_0$  ist offensichtlich von der Ordnung  $\mathcal{O}(\lambda)$ . Die  $\star$ -Wurzel ist als eine formale TAYLOR-Reihe zu verstehen.

**Definition 4.2.3** (Stark voller Projektor [BURSZTYN & WALDMANN 2005]).

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\star$ -Algebra. Man nennt einen Projektor  $P_0 \in M_n(\mathcal{A})$  stark voll, falls es ein invertierbares Element  $\tau \in \mathcal{A}$  gibt, so daß  $\text{tr}(P_0) = (\tau\tau^*)^{-1}$ .

**Lemma 4.2.4** ((Stark) voller deformierter Projektor).

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\ast$ -Algebra, und  $P_0 \in M_n(\mathcal{A})$  sei idempotent. Sei weiter  $\mathbf{P} \in M_n(\mathcal{A})$  eine Deformation von  $P_0$ , dann ist  $P_0$  genau dann voll, wenn  $\mathbf{P}$  voll ist. Ist  $P_0$  eine Projektion, dann ist  $\mathbf{P}$  genau dann stark voll, wenn  $P_0$  stark voll ist.

*Beweis.* Siehe beispielsweise [BURSZTYN 2001, Lemma 4.4, 4.5].  $\square$

**Lemma 4.2.5** (Deformation von  $P_0 M_n(\mathcal{A}) P_0$ ).

Sei  $P_0$  ein idempotentes Element in  $M_n(\mathcal{A})$  und  $\mathcal{A} \in M_n(\mathcal{A})[[\lambda]]$ . Die Abbildung  $P_0 M_n(\mathcal{A}) P_0 \rightarrow \mathbf{P} \star M_n(\mathcal{A}) \star \mathbf{P}$ ,  $P_0 A P_0 \mapsto \mathbf{P} \star (P_0 A P_0) \star \mathbf{P}$  ist ein  $\mathbb{C}[[\lambda]]$ -Isomorphismus und eine formale Deformation von  $P_0 M_n(\mathcal{A}) P_0$ . Ist desweiteren  $P_0$  projektiv und  $\mathcal{A}$  eine HERMITESche Deformation, dann induziert dies eine HERMITESche Deformation von  $P_0 M_n(\mathcal{A}) P_0$ .

*Beweis.* Siehe [BURSZTYN 2001, Lemma 4.6, Corollary 4.7].  $\square$

Wir wollen uns nun im weiteren der formalen Deformation von *projektiven Moduln* widmen. Diese werden bei der MORITA-Äquivalenz von deformierten Algebren eine wichtige Rolle spielen.

**Definition 4.2.6** (Deformation eines  $\mathcal{A}$ -Rechtsmoduls  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ ).

Sei  $\mathcal{A}$  eine assoziative Algebra und  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  ein  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul. Ferner sei  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}[[\lambda]], \star)$  die formale Deformation der Algebra  $\mathcal{A}$  nach Definition 3.4.1. Eine Deformation des  $\mathcal{A}$ -Rechtsmoduls  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  ist gegeben durch

$$\mathcal{E}_{\mathcal{A}}[[\lambda]] \times \mathcal{A} \ni (x, a) \mapsto x \bullet a = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n R_n(x, a) \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}[[\lambda]]. \quad (4.2.2)$$

Dabei seien  $R_n : \mathcal{E}_{\mathcal{A}}[[\lambda]] \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{A}}[[\lambda]]$   $\mathbb{C}[[\lambda]]$ -bilineare Abbildungen, und  $R_0(x, a) = x \cdot a$  ist die gewöhnliche Modulstruktur. Die Kompatibilitätsbedingung für die deformierte Algebra-Rechtsmultiplikation lautet

$$(x \bullet a) \bullet a' = x \bullet (a \star a'). \quad (4.2.3)$$

Wir bezeichnen den deformierten  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul (kompatibel mit der deformierten Algebra  $\mathcal{A}$ ) mit  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{E}_{\mathcal{A}}[[\lambda]], \bullet)$ .

Schreiben wir die Deformation der Algebra  $\mathcal{A}$  als eine formale Potenzreihe (vgl. Gleichung (3.4.1)), so können wir auf dem Niveau der bilinearen Abbildungen  $R_i$  und  $C_j$  die Kompatibilitätsbedingung aus Gleichung (4.2.3) in jeder  $\lambda$ -Ordnung  $n$  als

$$\sum_{i=0}^n [R_n(R_{n-i}(x, a), a') - R_n(x, C_{n-i}(a, a'))] = 0 \quad (4.2.4)$$

schreiben. Analog zu Definition 3.4.3 führen wir die Äquivalenz zweier deformierter Moduln ein.

**Definition 4.2.7** (Äquivalenz zweier deformierter Moduln).

Zwei  $\mathcal{A}$ -Rechtsmoduln  $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}})_1 = (\mathcal{E}_{\mathcal{A}}[[\lambda]], \bullet_1)$  und  $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}})_2 = (\mathcal{E}_{\mathcal{A}}[[\lambda]], \bullet_2)$  nennt man genau dann äquivalent, falls es  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildungen  $T_r : \mathcal{E}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  gibt, so daß

$$T = \text{id} + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r T_r : (\mathcal{E}_{\mathcal{A}})_1 \rightarrow (\mathcal{E}_{\mathcal{A}})_2 \quad (4.2.5)$$

ein  $\mathcal{A}$ -Modulisomorphismus ist.

Analog zu den  $\mathcal{A}$ -Rechtsmoduln lassen sich natürlich auch  $\mathcal{B}$ -Linksmoduln  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E} = ({}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}[[\lambda]], \bullet')$  definieren.

**Proposition 4.2.8** (Endlich erzeugte und projektive Deformation).

Sei  $\mathcal{A}$  eine Algebra mit Einselement über dem Ring  $\mathbb{C}$ , und  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}[[\lambda]], \star)$  sei eine Deformation von  $\mathcal{A}$ . Sei nun  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  ein endlich erzeugter, projektiver  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul, dann existiert ein deformierter  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$   $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul, der endlich erzeugt und projektiv über  $\mathcal{A}$  ist. Diese Deformation ist bis auf Äquivalenz eindeutig.

*Beweis.* Siehe [BURSZTYN 2001, Proposition 4.10].  $\square$

**Proposition 4.2.9** (Ringtheoretische MORITA-Äquivalenz).

Sei  $P_0 \in M_n(\mathcal{A})$  voll idempotent, dann existiert eine Bijektion  $\Phi : \text{Def}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Def}(\mathcal{B})$  mit  $\mathcal{B} = P_0 M_n(\mathcal{A}) P_0$ . Dies bedeutet, daß die formalen Deformationen im ringtheoretischen Sinne MORITA-äquivalent sind.

*Beweis.* Ein ausführlicher Beweis findet sich in [BURSZTYN 2001, Proposition 4.11].  $\square$

Im weiteren wollen wir nun innere Produktmoduln deformieren, so daß wir die Struktur des  $\mathcal{A}$ -wertigen inneren Produktes von  $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  auf den deformierten Modul retten. Damit werden wir in der Lage sein, den Begriff der \*-MORITA-Äquivalenz und der starken MORITA-Äquivalenz auf deformierte Algebren zu übertragen. Sei im weiteren nun  $\mathcal{A}$  eine \*-Algebra und  $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  sei ein über  $\mathcal{A}$  endlich erzeugter projektiver innerer Produktmodul.

**Definition 4.2.10** ( $\mathcal{A}$ -wertiges inneres Produkt auf  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ ).

Sei  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}[[\lambda]], \star)$  eine HERMITESche Deformation und  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{E}_{\mathcal{A}}[[\lambda]], \bullet)$  eine zugehörige Deformation von  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ . Man nennt  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{E}_{\mathcal{A}}[[\lambda]], \bullet, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  eine HERMITESche Deformation des inneren Produktmoduls  $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$ , falls sesquilineare Abbildungen  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(n), \mathcal{A}} : \mathcal{E}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{E}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$  existieren, so daß

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \langle \cdot, \cdot \rangle_{(n), \mathcal{A}}, \quad (4.2.6)$$

ein vollständig positiv definites  $\mathcal{A}$ -wertiges inneres Produkt auf  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}[[\lambda]]$  ist.

**Definition 4.2.11** (Äquivalenz zweier deformierter innerer Produktmoduln).

Man nennt zwei HERMITESche Deformation  $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}[[\lambda]], \bullet, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  und  $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}[[\lambda]], \bullet', \langle \cdot, \cdot \rangle'_{\mathcal{A}})$  des inneren Produktmoduls  $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  äquivalent, falls es einen  $\mathcal{A}$ -Modulisomorphismus nach Definition 4.2.7 der Form  $T : (\mathcal{E}_{\mathcal{A}}[[\lambda]], \bullet) \rightarrow (\mathcal{E}_{\mathcal{A}}[[\lambda]], \bullet')$  gibt, so daß

$$\langle T(x), T(y) \rangle'_{\mathcal{A}} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{A}}, \quad \text{für alle } x, y \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}. \quad (4.2.7)$$

**Proposition 4.2.12.**

Sei  $\mathcal{A}$  eine \*-Algebra mit Einselement und  $\mathcal{A}$  eine HERMITESche Deformation von  $\mathcal{A}$ . Desweiteren sei  $P_0 \in M_n(\mathcal{A})$  eine Projektion. Es existiert nun für den  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = P_0 \mathcal{A}^n$ , mit dem kanonischen inneren Produkt

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{A}} = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i, \quad \text{für } x, y \in P_0 \mathcal{A}^n,$$

eine (bis auf Äquivalenz eindeutige) HERMITESche Deformation von  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  bezüglich der deformierten Algebra  $\mathcal{A}$ .

*Beweis.* Wir wollen uns auf den ersten Teil der Behauptung konzentrieren, da man hier die wesentliche Konstruktion erkennen kann. Den zweiten Teil findet man detailliert in [BURSZTYN 2001, Proposition 4.13]. Aus  $P_0$  erhält man einen deformierten Projektor  $P \in M_n(\mathcal{A})$ , und  $P \star \mathcal{A}^n$  wird zu einem  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul, so daß wir eine Deformation  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{E}_{\mathcal{A}}[[\lambda]], \bullet)$  gefunden haben. Desweiteren ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \langle \cdot, \cdot \rangle_{(n), \mathcal{A}}$  eine Deformation von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ , so daß  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = (P \star \mathcal{A}^n, \bullet, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  eine HERMITESche Deformation von  $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$  wird.  $\square$

Komplett analog zur MORITA-Theorie, die wir in den vorherigen Kapitel behandelt haben, können wir MORITA-Äquivalenz von deformierten Algebren formulieren, und damit zum PICARD-Gruppoid gelangen.

**Definition 4.2.13** (Deformierter Bimodul  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ ).

Seien  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}[[\lambda]], \star)$  und  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}[[\lambda]], \star')$  zwei deformierte Algebren nach Definition 3.4.1. Ein deformierter Bimodul  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = ({}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}[[\lambda]], \bullet', \bullet)$  ist ein  $\mathcal{B}$ -Linksmodul und ein  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul, so daß die  $\mathcal{B}$ -Linksmodulstruktur analog zu Gleichung (4.2.8) eine formale Potenzreihe der Form

$$b \bullet' x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n R'_n(b, x), \quad x \in {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \quad b \in \mathcal{B} \quad (4.2.8)$$

ist. Die Modulbedingungen schreiben sich dann als

- i.)  $(b \star' b') \bullet' x = b \bullet' (b' \bullet' x),$
- ii.)  $(b \bullet' x) \bullet a = b \bullet' (x \bullet a),$
- iii.)  $(x \bullet a) \bullet a' = x \bullet (a \star a')$

für alle  $x \in {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}[[\lambda]]$ ,  $a, a' \in \mathcal{A}[[\lambda]]$  und  $b, b' \in \mathcal{B}[[\lambda]]$ .

**Bemerkung 4.2.14.**

Wir bezeichnen die Deformation  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  eines  $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ -Bimoduls  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  bezüglich der beiden deformierten Algebren  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}[[\lambda]], \star)$  und  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}[[\lambda]], \star')$  als  $((\mathcal{B}[[\lambda]], \star'), (\mathcal{A}[[\lambda]], \star))$ -Bimodul bzw. kurz als  $(\star', \star)$ -Bimodul.

**Lemma 4.2.15** (Isomorphe Bimoduldeformationen).

Zwei  $(\star', \star)$ -Bimoduldeformationen des Bimoduls  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  sind genau dann isomorph, wenn es einen Bimodulisomorphismus  $T = \text{id} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T_n : {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \rightarrow {}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}'_{\mathcal{A}}$  gibt, so daß

$$b \bullet' x = T^{-1}(b \bullet' T(x)) \quad \text{und} \quad x \bullet a = T^{-1}(T(x) \bullet a).$$

Damit wirkt  $T$  auf den  $(\star', \star)$ -Bimoduldeformationen durch  $({}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}[[\lambda]], \bullet', \bullet) \mapsto ({}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}[[\lambda]], \bullet', \bullet)$ .

Nach diesen Definitionen ist klar, was es auf dem deformierten Niveau bedeutet, daß zwei Algebren MORITA-äquivalent sind. Die Definition ist komplett analog zu der in Kapitel 1.2.

Seien im weiteren  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}[[\lambda]], \star)$  und  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}[[\lambda]], \star')$  MORITA-äquivalent.

**Proposition 4.2.16** ([BURSZTYN & WALDMANN 2004, Prop. 3.7]).

Jeder Bimodul  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \in \underline{\text{Pic}}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$  ist isomorph zu einer  $(\star', \star)$ -Bimoduldeformation eines Elements  ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \in \underline{\text{Pic}}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ , und

$$\text{cl}_* : \text{Pic}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \ni [{}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}] \mapsto [{}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}] \in \text{Pic}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \quad (4.2.9)$$

ist eine wohldefinierte Abbildung.

**Korollar 4.2.17** ([BURSZTYN & WALDMANN 2004, Lem. 3.8]).

Die klassische Limes-Abbildung

$$\mathrm{cl}_* : \mathrm{Pic}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{A}) \quad (4.2.10)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

**Proposition 4.2.18** (MORITA-Äquivalenz von deformierten Algebren, [BURSZTYN 2001]).

Die deformierten  $*$ -Algebren  $\mathcal{A} = (C^\infty(M) [[\lambda]], \star)$  und  $\mathcal{A}' = (C^\infty(M) [[\lambda]], \star')$  sind genau dann stark MORITA-äquivalent wenn sie auch im ringtheoretischen Sinne MORITA-äquivalent sind. Dies bedeutet weiter, daß der Gruppoidmorphismus

$$\mathrm{Pic}^{\mathrm{str}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}') \rightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$$

injektiv ist.

### 4.3 Die PICARD-Gruppe von Sternprodukten

Wir wollen uns nun auf Sternprodukte auf symplektischen Mannigfaltigkeiten einschränken<sup>4</sup>. Sei dazu  $(M, \omega)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{A} = (C^\infty(M) [[\lambda]], \star)$  eine Deformation der kommutativen Algebra  $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ . Es ist klar, daß die MORITA-Äquivalenzbimoduln Schnitte in einem (komplexen) Geradenbündel  $L \xrightarrow{\pi} M$  über der Mannigfaltigkeit sind.

Wie bereits in Kapitel 3.5 beschrieben und beispielsweise in den Arbeiten [BERTELSON *et al.* 1997; DELIGNE 1995; NEST & TSYGAN 1995b] gezeigt, existiert eine Bijektion

$$c : \mathrm{Def}(M, \omega) \rightarrow \frac{1}{i\lambda} [\omega] + H_{\mathrm{dR}}^2(M) [[\lambda]],$$

was im Sternproduktfall der charakteristischen Klasse  $c(\star)$  (vgl. Gleichung (3.5.4)) entspricht.

**Proposition 4.3.1** (MORITA-Äquivalenz von Sternprodukten).

Zwei Sternprodukte  $(C^\infty(M) [[\lambda]], \star)$  und  $(C^\infty(M) [[\lambda]], \star')$  sind genau dann MORITA-äquivalent, wenn es ein komplexes Geradenbündel  $L \xrightarrow{\pi} M$  und  $\psi \in \mathrm{Symp}(M, \omega)$  gibt, so daß

$$\psi^* c(\star') = c(\star) + 2\pi i c_1(L), \quad (4.3.1)$$

wobei  $c_1(L) \in H_{\mathrm{dR}}^2(M, \mathbb{C})$  das Bild von  $e : H^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\mathrm{dR}}^2(M, \mathbb{C})$  der ersten CHERN-Klasse von  $L$  ist. Dies ist äquivalent dazu, daß für die Wirkung  $\Phi : \mathrm{SPic}(C^\infty(M)) \times \mathrm{Def}(C^\infty(M)) \rightarrow \mathrm{Def}(C^\infty(M))$  einen Symplektomorphismus  $T$  von  $C^\infty(M)$  gibt, so daß  $[T^*(\star)]$  und  $[\star']$  im gleichen  $\Phi$ -Orbit liegen.

**Satz 4.3.2** (Kern von  $\mathrm{cl}_*$  im symplektischen Fall).

Sei  $(M, \omega, \star)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit mit Sternprodukt, dann ist der Kern der klassischen Limes-Abbildung

$$\mathrm{cl}_* : \mathrm{Pic}((C^\infty(M) [[\lambda]], \star)) \rightarrow \mathrm{Pic}(C^\infty(M), \cdot)$$

<sup>4</sup>In [BURSZTYN & WALDMANN 2004] wird auch der POISSON-Fall behandelt.

gegeben durch

$$\ker(\mathrm{cl}_*) \cong \frac{H_\pi^1(M, \mathbb{C})}{2\pi i H_\pi^1(M, \mathbb{Z})} + \lambda H_\pi^1(M, \mathbb{C})[[\lambda]]. \quad (4.3.2)$$

Die Abbildung  $\mathrm{cl}_*$  ist ein Gruppenmorphismus<sup>5</sup> und genau dann injektiv, wenn  $H_\pi^1(M, \mathbb{C}) = 0$ .

*Beweis.* Der Beweis findet sich in [BURSZTYN & WALDMANN 2004].  $\square$

Wie wir bereits in Beispiel ?? gesehen haben, ist die PICARD-Gruppe der glatten Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit gegeben durch

$$\mathrm{Pic}(C^\infty(M)) = \mathrm{Diff}(M) \ltimes \mathrm{Pic}(M)$$

Wir definieren die folgende Abbildung

$$\mathrm{cl}_*^r = \mathrm{pr} \circ \mathrm{cl}_* : \mathrm{Pic}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathrm{SPic}(\mathcal{A}),$$

dabei ist  $\mathrm{pr} : \mathrm{Pic}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathrm{SPic}(\mathcal{A})$  die natürliche Projektion der PICARD-Gruppe auf die statische PICARD-Gruppe, die uns den „interessanten“ Teil der PICARD-Gruppe liefert. Desweiteren definieren wir folgende Untermenge der Symplektomorphismen von  $M$ . Sei  $\ell \in H^2(M, \mathbb{Z})$ .

$$P_\ell = \{T \in \mathrm{Symp}(M) | e(\ell) = T^*[\omega_0] - [\omega_0] \quad \text{und} \quad T^*[\omega_n] = [\omega_n] \text{ für } n \geq 0\}. \quad (4.3.3)$$

**Lemma 4.3.3.**

Sei  $(M, \omega, \star)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit mit Sternprodukt mit  $c(\star) = \frac{1}{i\hbar}[\omega] + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n [\omega_n]$ , dann gilt

$$\mathrm{im}(\mathrm{cl}_*^r) = \{\ell \in H^2(M, \mathbb{Z}) | \exists T \in P_\ell\}. \quad (4.3.4)$$

**Satz 4.3.4** (Bild von  $\mathrm{cl}_*$  im symplektischen Fall).

Sei  $(M, \omega, \star)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit mit Sternprodukt. Das Bild der klassischen Limes-Abbildung  $\mathrm{cl}_*$  in  $\mathrm{Pic}(C^\infty(M)) = \mathrm{Diff}(M) \ltimes \mathrm{Pic}(M)$  ist gegeben durch

$$\mathrm{im}(\mathrm{cl}_*) = \{(T, \ell) \in \mathrm{Diff}(M) \ltimes \mathrm{Pic}(M) | T \in P_\ell \quad \text{und} \quad \ell \in \mathrm{im}(\mathrm{cl}_*^r)\}. \quad (4.3.5)$$

Konkretere Ausführungen sowie einige Beispiele findet man in [BURSZTYN & WALDMANN 2004, Chapter 7].

---

<sup>5</sup>Im POISSON-Fall ist diese Aussage im allgemeinen falsch!

# Ausblick

Wir wollen noch einen kurzen Blick über den Tellerrand wagen und uns interessanten zukünftigen Projekte zuwenden. Es liegt nahe sich, aufbauend auf dieser Arbeit, den  $H$ -äquivarianten Fall deformierter Algebren anzusehen. Dabei fallen mehrere interessante Aufgaben an, die wir nun kurz umreißen wollen, und deren Lösung wir gerne dem interessierten Leser überlassen.

- i.)* Besonders interessant wäre es den Kern und das Bild der klassischen Limes-Abbildung

$$\mathrm{cl}_* : \mathrm{Pic}_H^{\mathrm{str}}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathrm{Pic}_H^{\mathrm{str}}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$$

zu verstehen. Wie von BURSZTYN & WALDMANN [2004] gezeigt wurde (vgl. Kapitel 4.3), ist der gewöhnliche Fall eines Sternproduktes auf einer Mannigfaltigkeit, d. h. ohne die Wirkung durch eine HOPF-Algebra, schon schwierig zu behandeln. Im allgemeinen wird es daher nicht einfach sein ein nichttriviales Ergebnis zu erlangen.

- ii.)* Aufbauend auf den Ergebnissen aus Kapitel ?? liegt es nahe den Morphismus

$$\mathrm{Pic}_H^{\mathrm{str}} \rightarrow \mathrm{Pic}^{\mathrm{str}}$$

für einige konkrete Beispiele zu betrachten, und so die abstrakten Ergebnisse dieser Arbeit mit Leben zu füllen. Wir denken hier insbesondere an die Deformationsquantisierung, so daß der Morphismus

$$\mathrm{Pic}_H^{\mathrm{str}}((C^\infty(M) [[\lambda]], \star)) \rightarrow \mathrm{Pic}^{\mathrm{str}}((C^\infty(M) [[\lambda]], \star))$$

für ein konkretes  $H$  von besonderem Interesse wäre. Wie wir in Kapitel ?? auch gezeigt haben wäre dafür das Verstehen der Gruppe  $\mathrm{U}(H, (C^\infty(M) [[\lambda]], \star))$  vonnöten. Das „einfache“ Beispiel ?? von WALDMANN [2005a] zeigt aber, daß auch dies ein eher kompliziertes Unterfangen ist.

- iii.)* Ein deutlich einfacheres und ebenso interessantes Beispiel wäre die Gruppe  $\mathrm{U}(\mathcal{C}(G), \mathcal{A})$  zu verstehen, im speziellen für  $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ . Das Problem hierbei besteht darin die auftretende Gruppenkohomologie zu verstehen.





# Anhang A

## Algebraische Grundlagen

### A.1 Geordnete Ringe und formale Potenzreihen

#### A.1.1 Ringe und geordnete Ringe

Für einen tieferen Einblick in die hier behandelten Themen verweisen wir auf die Bücher [ROWEN 1991; LANG 1997] und [JACOBSON 1985].

**Definition A.1.1** (Gruppe, Untergruppe).

Eine Gruppe  $(G, \cdot)$  ist eine nichtleere Menge  $G$  mit der Verknüpfung  $\cdot$ , so daß für alle Elemente  $g, g_1, g_2, g_3 \in G$  die folgenden Bedingungen gelten.

- i.) Die Verknüpfung ist assoziativ, d. h. es gilt  $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ .
- ii.) Es existiert ein Einselement  $e \in G$ , so daß  $g \cdot e = e \cdot g = g$  ist.
- iii.) Zu jedem Element  $g \in G$  existiert ein Element  $g^{-1} \in G$ , so daß  $g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e$  ist.

Desweiteren bezeichnet man eine Gruppe als kommutativ, wenn die Verknüpfung kommutativ ist.

Eine Untergruppe  $H$  von  $G$  ist eine Menge  $H \subseteq G$ , so daß für alle  $h_1, h_2 \in H$  gilt  $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$ .

**Definition A.1.2** (Ring).

Ein Ring  $(R, \cdot, +)$  ist eine nichtleere Menge  $R$  mit zwei Verknüpfungen  $\cdot : R \times R \rightarrow R$ , der Multiplikation und  $+: R \times R \rightarrow R$ , der Addition, so daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- i.)  $(R, +)$  ist eine kommutative Gruppe, und das neutrale Element bezeichnet man mit  $0 \in R$ .
- ii.)  $(R, \cdot)$  ist assoziativ und besitzt ein Einselement  $1_R \in R$ .
- iii.) Für alle  $r, s, t \in R$  gelten die Distributivgesetze  $(r+s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t$  und  $t \cdot (r+s) = t \cdot r + t \cdot s$ .

**Definition A.1.3** (Modul, Untermodul).

Ein  $R$ -Rechtsmodul (oder Rechtsmodul)  $(M_R, +, \cdot)$  für den Ring  $R$  ist eine nichtleere Menge  $M_R$  mit den folgenden Eigenschaften für alle  $m, n \in M_R$  und  $r, s \in R$ :

- i.)  $(M_R, +)$  ist eine ABELsche Gruppe.
- ii.) Die Verknüpfungen des Moduls  $\cdot : M_R \times R \rightarrow M_R$  und  $(M_R, +)$  sind mit den Ringstrukturen verträglich

$$(m \cdot r) \cdot s = m \cdot (r \cdot s), \quad m \cdot (r + s) = m \cdot r + m \cdot s \quad \text{und} \quad (m + n) \cdot r = m \cdot r + n \cdot r.$$

Ein Untermodul ist ein Modul  $N_R \subseteq M_R$  für den  $N_R \cdot R \subseteq N_R$  und  $N_R + N_R \subseteq N_R$  gilt.

Analog definiert man einen  $R$ -Linksmodul.

**Definition A.1.4** (Ideal eines Rings).

Sei  $(R, +, \cdot)$  ein Ring. Wir bezeichnen  $I_L$  als Linksideal, falls

- i.)  $(I_L, +)$  eine Untergruppe von  $(R, +)$  ist,
- ii.)  $x \cdot r \in I_L$  für alle  $x \in I_L$  und alle  $r \in R$  ist.

Analog ist  $I_R$  als Rechtsideal definiert, falls

- i.)  $(I_R, +)$  eine Untergruppe von  $(R, +)$  ist,
- ii.)  $r \cdot x \in I_R$  für alle  $x \in I_R$  und alle  $r \in R$  ist.

Ein Ideal  $I$  des Rings  $R$  ist sowohl Rechts- als auch Linksideal. Ferner bezeichnet man ein Ideal als echt, falls  $I \subset R$ . Die trivialen Ideale sind der Ring  $R$  selbst und das Nullideal  $0$ .

**Lemma A.1.5** (Ideale des Rings  $R$ ).

Jeder Ring  $R$  ist ein Modul über sich selbst. Die Ideale des Rings  $R$  sind genau die Untermoduln des Rings  $R$  als Modul.

**Definition A.1.6** (Eigenschaften von Ringen).

Sei  $(R, \cdot, +)$  ein Ring. Man nennt den Ring  $R$

- i.) kommutativ oder ABELSCH, falls die Verknüpfung  $\cdot$  kommutativ ist.
- ii.) einfach, falls er nur triviale Ideale hat.
- iii.) (links-, rechts-) primitiv, falls es einen treuen irreduziblen  $R$ -(links-, rechts-) Modul gibt.
- iv.) NOETHERSCH, wenn der Ring  $R$  als  $R$ -Modul NOETHERSCH ist. Ein  $R$ -Modul ist NOETHERSCH, wenn jeder Untermodul endlich erzeugt ist. Äquivalent dazu sind die aufsteigend Kettenbedingung, d. h. es existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so daß jede aufsteigende Kette von Untermoduln stationär wird

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \dots \subseteq N_N = N_{N+1} = \dots,$$

und die Maximalbedingung für Untermoduln, d. h. jede nichtleere Menge von  $R$ -Untermoduln von  $M$  hat ein maximales Element bezüglich der Inklusion.

- v.) ARTINSCH, wenn der Ring  $R$  als  $R$ -Modul ARTINSCH ist, d. h. man nennt einen Modul  $M$  ARTINSCH, wenn jede absteigende Folge von Untermoduln stationär wird: es existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so daß

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \dots \supseteq M_N = M_{N+1} = \dots$$

Dies bezeichnet man als absteigende Kettenbedingung. Äquivalent ist die Minimalbedingung für Untermoduln, daß jede nichtleere Menge von  $R$ -Untermoduln von  $M$  ein minimales Element bezüglich der Inklusion hat.

- vi.) halbeinfach, falls der Ring  $R$  als ( $R$ -Modul betrachtet) eine Summe von einfachen  $R$ -Untermoduln ist.

**Definition A.1.7** (JACOBSON-Radikal, [JACOBSON 1989]).

Das JACOBSON-Radikal eines Rings ist die Schnittmenge aller Kerne der irreduziblen Darstellungen des Rings. Wir Bezeichnen das JACOBSON-Radikal eines Rings  $R$  mit  $J(R)$ .

**Definition A.1.8** (Geordneter Ring).

Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit  $1_R \neq 0$  und sei  $P \subset R$ . Man nennt  $(R, P)$  einen geordneten Ring, falls für alle  $r \in R$  entweder  $r \in P$  oder  $r \in -P$  oder  $r = 0$ , und für alle  $r, s \in P$  auch  $rs \in P$  und  $r + s \in P$  liegt.  $R$  ist somit die disjunkte Vereinigung  $R = \{-P\} \dot{\cup} \{0\} \dot{\cup} \{P\}$

**Definition A.1.9** (Relationen und Betrag auf einem geordneten Ring).

Sei  $(R, P)$  ein geordneter Ring nach Definition A.1.8.

- i.) Wir nennen die Elemente  $r \in P$  positive Elemente und Elemente  $r \in -P$  negative Elemente.
- ii.) Wir bezeichnen  $r > s$  ( $r$  größer  $s$ ), falls  $r - s \in P$ , und demnach  $r < s$  ( $r$  kleiner  $s$ ), falls  $r - s \in -P$ . Sei  $r - s = 0$  so ist  $r = s$  ( $r$  gleich  $s$ ).
- iii.) Den Betrag  $|r|$  definieren wir als  $|r| = r$  falls  $r \in P$  und  $|r| = -r$  falls  $r \in -P$ .

**Korollar A.1.10** (Eigenschaften eines geordneten Rings  $R$ ).

Sei  $(R, P)$  ein geordneter Ring nach Definition A.1.8.

- i.) Es gilt  $r^2 = rr > 0$  oder  $r^2 = 0 \Leftrightarrow r = 0$  insbesondere ist  $-1 < 0 < 1$ .
- ii.)  $1 + \dots + 1 = n1 > 0$ , was insbesondere heißt, daß der Ring  $(R, P)$  die Charakteristik 0 hat und damit  $\mathbb{Z} \subseteq R$  ist.
- iii.) Ein geordneter Ring ist immer nullteilerfrei, d. h. aus  $rs = 0$  folgt immer  $r = 0$  oder  $s = 0$ .

**Definition A.1.11** (Archimedische Ordnung).

Man nennt einen geordneten Ring  $(R, P)$  archimedisch geordnet, falls für alle Elemente  $r, s \in P$  ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert, so daß  $r < ns$ .

**Bemerkungen A.1.12.**

- i.) Die komplexe Erweiterung  $C = R(i)$  eines geordneten Rings  $R$  ist die Menge  $C = R \times R$  mit  $i = (0, 1)$  und der komponentenweise Addition, sowie der Multiplikation mit  $i^2 = -1$ . Die Elemente  $z = (u, v) \in C$  schreiben wir als  $z = u + iv$  und bezeichnen  $u$  als den *Realteil* und  $v$  als den *Imaginärteil* von  $z$ . Die komplexe Konjugation bezeichnen wir mit  $z = u + iv \mapsto \bar{z} = u - iv$ . Offensichtlich gilt  $R \ni z\bar{z} > 0$  für  $z \neq 0$  und  $z\bar{z} = 0$  für  $z = 0$ .
- ii.) Aufgrund der Nullteilerfreiheit können wir bei einem Ring immer zu seinem *Quotientenkörper*  $\hat{R}$  von  $R$  übergehen. Dabei ist  $\hat{R}$  die Äquivalenzklasse formaler Brüche  $\frac{a}{b}$  mit  $a, b \in R$  und  $b \neq 0$ , so daß  $\frac{a}{b} \cong \frac{a'}{b'}$  falls es  $c, c' \in R$  gibt mit  $ca = c'a'$  und  $cb = c'b'$ . Mittels der gewöhnlichen Addition und Multiplikation für Brüche wird  $\hat{R}$  zu einem geordneten Körper. Die Inklusion  $R \hookrightarrow \hat{R}$  geht via  $a \mapsto \frac{a}{1}$  und ist ordnungserhaltend.

**Beispiele A.1.13** (Beispiele für (geordnete) Ringe).

- i.) Die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  bilden einen geordneten und sogar archimedischen Ring. Er zeichnet sich dadurch aus, daß er der kleinste geordnete Ring und Teilmenge jedes geordneten Rings  $\mathbb{Z} \subseteq R$  ist.
- ii.) Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  und die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  bilden geordnete und archimedische Ringe.  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  sind zudem sogar Körper. Offensichtlich ist der Quotientenkörper von  $\mathbb{Z}$  der Körper der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ .
- iii.) Sei  $R$  ein beliebiger Ring, so sind die  $n \times n$ -Matrizen  $M_n(R)$  über diesem Ring  $R$  wieder ein Ring. Für  $n \geq 2$  ist  $M_n(R)$  nicht geordnet, selbst wenn  $R$  geordnet (und archimedisch) ist.

## A.1.2 Formale Potenzreihen

Der richtige Rahmen, um über *formale Potenzreihen* nachzudenken, ist ein *Modul*  $M$  über einem geordneten Ring  $R$ . Wir werden uns bei der Darstellung an [JACOBSON 1989, Seite 422f] und [WALDMANN 1999, Seite 139f] orientieren.

**Definition A.1.14** (Formale Potenzreihen).

Sei  $\mathcal{M}$  ein Modul über einem geordneten Ring  $R$ , dann definieren wir den Modul  $\mathcal{M}[[\lambda]]$  der formalen Potenzreihen als kartesisches Produkt

$$\mathcal{M}[[\lambda]] := \prod_{j=0}^{\infty} \mathcal{M}_j \quad \text{mit} \quad \mathcal{M}_j = \mathcal{M}. \quad (\text{A.1.1})$$

Elemente in  $\mathcal{M}[[\lambda]]$  sind dann Folgen  $m = (m_0, m_1, m_2, \dots)$ , die wir symbolisch in der folgenden Form

$$m = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j m_j, \quad \text{mit} \quad m_j \in \mathcal{M}, \quad (\text{A.1.2})$$

schreiben werden, dabei bezeichnen wir  $\lambda$  als den formalen Parameter der formalen Reihe.

**Bemerkungen A.1.15** (Formale Potenzreihen).

- i.) Formale Reihen sind ein rein algebraisches Konzept, d. h. wir machen uns bei der Notation (A.1.2) keinerlei Gedanken über Konvergenz im herkömmlichen Sinne<sup>1</sup>.
- ii.) Das Objekt  $\mathcal{M}[[\lambda]]$  ist offensichtlich wieder ein Modul über dem Ring  $R$ , wobei die Modulstruktur die Multiplikation mit Elementen aus  $R$  sowie die gliedweise Addition ist.

Sei  $\mathcal{A}$  eine Algebra, so kann man analog  $\mathcal{A}[[\lambda]]$ , eine formale Potenzreihe in  $\lambda$  mit Werten in  $\mathcal{A}$ , definieren, wobei die  $R$ -Algebrastruktur durch

$$ab := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \quad (\text{A.1.3})$$

gegeben ist. Die Multiplikation ist  $R$ -bilinear und  $\mathcal{A}[[\lambda]]$  ist genau dann kommutativ oder assoziativ, wenn die Algebra  $\mathcal{A}$  kommutativ oder assoziativ ist. Ist  $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$  das Einselement, so ist  $1_{\mathcal{A}} := (1_{\mathcal{A}}, 0, 0, \dots) \in \mathcal{A}[[\lambda]]$  das Einselement von  $\mathcal{A}[[\lambda]]$ .

**Definition A.1.16** ( $R[[\lambda]]$ -lineare Abbildungen).

Seien  $\mathcal{M}[[\lambda]]$  und  $\mathcal{N}[[\lambda]]$  zwei  $R$ -Moduln. Wir definieren eine  $R[[\lambda]]$ -lineare Abbildung

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \phi_k : \mathcal{M}[[\lambda]] \rightarrow \mathcal{N}[[\lambda]],$$

wobei  $\phi_n : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$   $R$ -lineare Abbildungen sind, über

$$\phi(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{k=0}^n \phi_k(m_{n-k}), \quad \text{für} \quad m \in \mathcal{M}[[\lambda]]. \quad (\text{A.1.4})$$

**Lemma A.1.17.**

Seien  $\mathcal{M}[[\lambda]]$  und  $\mathcal{N}[[\lambda]]$  zwei  $R$ -Moduln. Zu jeder  $R[[\lambda]]$ -linearen Abbildung  $\phi : \mathcal{M}[[\lambda]] \rightarrow \mathcal{N}[[\lambda]]$  gibt es eindeutig bestimmte  $R$ -lineare Abbildungen  $\phi_0, \phi_1, \dots : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ , so daß es ein  $\phi = \sum_n \lambda^n \phi_n$  nach Definition A.1.16 gibt. Es gilt also

$$\text{Hom}_R(\mathcal{M}, \mathcal{N})[[\lambda]] \cong \text{Hom}_{R[[\lambda]]}(\mathcal{M}[[\lambda]], \mathcal{N}[[\lambda]]). \quad (\text{A.1.5})$$

<sup>1</sup>Ist man, wie bei manchen Sternprodukten, in einem konvergenten Rahmen, so übernimmt  $\hbar$  die Stelle von  $\lambda$ . Vergleiche hierzu beispielsweise [AGARWAL & WOLF 1970a, b, c; BEISER 2005; BEISER et al. 2005].

Die *Ordnung*  $o$  ist eine Struktur mit der formale Potenzreihen auf natürliche Weise ausgestattet sind. Mit ihrer Hilfe werden wir eine *Ultrametrik*  $d$  auf dem Raum der formalen Potenzreihen definieren.

**Definition und Lemma A.1.18** (Ordnung auf  $\mathcal{M}[[\lambda]]$ ).

Sei  $\mathcal{M}[[\lambda]] \ni m = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n m_n$  eine formale Potenzreihe. Wir definieren die Ordnung  $o$  durch

$$o : \mathcal{M}[[\lambda]] \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

$$o(m) = \begin{cases} k & \text{falls } m_0, m_1, \dots, m_{k-1} = 0 \text{ und } m_k \neq 0, \\ +\infty & \text{falls } m = 0. \end{cases} \quad (\text{A.1.6})$$

Sie hat die folgenden Eigenschaften

- i.)  $o(m+n) \geq \min(o(m), o(n))$ ,
- ii.)  $o(m) = o(-m)$ .

**Definition A.1.19** ( $\lambda$ -adische Bewertung auf  $\mathcal{M}[[\lambda]]$  und Ultrametrik  $d_\varphi$ ).

Gegeben  $\mathcal{M}[[\lambda]]$ . Wir definieren die  $\lambda$ -adische Bewertung  $\varphi : \mathcal{M}[[\lambda]] \rightarrow \mathbb{Q}$  durch

$$\varphi(m) = 2^{-o(m)}, \quad (\text{A.1.7})$$

wobei wir festlegen, daß  $2^{-\infty} = 0$  ist. Durch die  $\lambda$ -adische Bewertung  $\varphi$  wird eine Ultrametrik

$$d_\varphi : \mathcal{M}[[\lambda]] \times \mathcal{M}[[\lambda]] \rightarrow \mathbb{Q} \quad (\text{A.1.8})$$

auf  $\mathcal{M}[[\lambda]]$  definiert mittels

$$d_\varphi(m, n) := \varphi(m - n) = 2^{-o(m-n)}. \quad (\text{A.1.9})$$

**Lemma A.1.20** (Eigenschaften der Ultrametrik  $d_\varphi$ ).

Die Ultrametrik  $d_\varphi$  nach Definition A.1.19 hat für alle Elemente  $m, n, \ell \in \mathcal{M}[[\lambda]]$  die folgenden Eigenschaften:

- i.)  $d_\varphi(m, n) = d_\varphi(n, m) \geq 0$ ,
- ii.)  $d_\varphi(m, n) = 0 \iff m = n$ ,
- iii.)  $d_\varphi(m, n) \leq \max(d_\varphi(m, \ell), d_\varphi(n, \ell))$ .

**Lemma A.1.21** ( $\lambda$ -adische Topologie).

Sei  $\mathcal{M}$  ein  $R$ -Modul,  $\mathcal{A}$  eine  $R$ -Algebra und  ${}_A\mathcal{E}$  ein  $\mathcal{A}$ -Linksmodul. Es gilt

- i.) Die Abbildung  $d_\varphi$  nach Definition A.1.19 definiert eine Ultrametrik für  $\mathcal{M}[[\lambda]]$ , so daß der Modul mit der Metrik  $(\mathcal{M}[[\lambda]], d_\varphi)$  ein vollständiger metrischer Raum wird. Man nennt die durch  $d_\varphi$  induzierte Topologie die  $\lambda$ -adische Topologie.
- ii.) Mittels der  $\lambda$ -adischen Topologie wird  $R[[\lambda]]$  zu einem topologischen Ring,  $\mathcal{M}[[\lambda]]$  zu einem topologischen  $R[[\lambda]]$ -Modul,  $\mathcal{A}[[\lambda]]$  eine topologische  $R[[\lambda]]$ -Algebra und  ${}_A\mathcal{E}[[\lambda]]$  ein topologischer  $\mathcal{A}[[\lambda]]$ -Linksmodul. Die auf  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}[[\lambda]]$  induzierte Topologie ist die diskrete.
- iii.) Seien  $m_0, m_1, \dots \in \mathcal{M}$ , so gilt im Rahmen der  $\lambda$ -adischen Topologie

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \lambda^n m_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n m_n. \quad (\text{A.1.10})$$

iv.) Der  $R$ -Modul  $\mathcal{M}[\lambda]$  der Polynome in  $\lambda$  mit Koeffizienten in  $\mathcal{M}$  liegt dicht in  $\mathcal{M}[[\lambda]]$  bezüglich der  $\lambda$ -adischen Topologie.

*Beweis.* Der Beweis wird in [KASSEL 1995, Kapitel XVI.1-4] geführt.  $\square$

## A.2 HOPF-\* -Algebren

Zuerst wollen wir uns mit Algebren und Koalgebren auseinandersetzen, und den gängigen Formalismus einführen. Eine HOPF-Algebra wird dann beide Strukturen haben, sowie eine weitere, die der Antipode. In einem weiteren Schritt werden wir über HOPF-\* -Algebren sprechen, die zusätzlich zu der HOPF-Struktur auch die einer \*-Algebra besitzen, also mit einem antilinearen Antiautomorphismus ausgestattet sind, der mit allen HOPF-Algebrastrukturen auf eine natürliche Weise verträglich sein wird. Die Notationen in diesem Kapitel orientiert sich im wesentlichen an [MAJID 1995] und [KASSEL 1995]. Ferner legen wir dem geneigten Leser [SWEEDLER 1969; CHARI & PRESSLEY 1994; KLIMYK & SCHMÜDGEN 1997; ETINGOF & SCHIFFMANN 1998], sowie [JANSEN & WALDMANN 2006] nah. In diesem Kapitel sei  $\mathbb{C} = R(i)$ , wobei  $R$  ein geordneter Ring sei, und es gelte  $i^2 = -1$ .

### A.2.1 Algebren, Koalgebren und Bialgebren

#### Algebra

**Definition A.2.1** (Algebra).

Eine assoziative Algebra  $(\mathcal{A}, \mu, \eta)$  über einem kommutativen Ring  $\mathbb{C}$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Modul  $\mathcal{A}$  mit zwei  $\mathbb{C}$ -Modul Abbildungen:

i.)  $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , der Multiplikation,

ii.)  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$ , der Einsabbildung,

mit den Eigenschaften

$$\mu \circ (\text{id} \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes \text{id}) \quad \text{und} \quad \mu \circ (\eta \otimes \text{id}) = \mu \circ (\text{id} \otimes \eta) = \text{id}, \quad (\text{A.2.1})$$

was der Kommutativität der folgenden Diagramme entspricht:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\mu \otimes \text{id}} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ \text{id} \otimes \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{A} \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} \mathbb{C} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\eta \otimes \text{id}} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xleftarrow{\text{id} \otimes \eta} & \mathcal{A} \otimes \mathbb{C} \\ & \searrow & \downarrow \mu & \swarrow & \\ & & \mathcal{A} & & \end{array} \quad (\text{A.2.2})$$

Die erste Eigenschaft ist die Assoziativität.

**Bemerkung A.2.2** (Einsabbildung).

Die Einsabbildung ist so zu verstehen, daß jedem Element aus  $\mathbb{C}$  ein vielfaches des Einselements in der Algebra zugeordnet wird:

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \eta(z) = z \cdot 1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

**Definition A.2.3** (Algebramorphismus).

Ein Algebramorphismus  $f : (\mathcal{A}_1, \mu_1, \eta_1) \rightarrow (\mathcal{A}_2, \mu_2, \eta_2)$  ist eine lineare Abbildung, so daß

$$\mu_2 \circ (f \otimes f) = f \circ \mu_1 \quad \text{und} \quad f \circ \eta_1 = \eta_2, \quad (\text{A.2.3})$$

was äquivalent zu der Kommutativität der folgenden Diagramme ist:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{f \otimes f} & \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2 \\ \mu_1 \downarrow & & \downarrow \mu_2 \\ \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{f} & \mathcal{A}_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \mathcal{C} & \\ \eta_1 \swarrow & & \searrow \eta_2 \\ \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{f} & \mathcal{A}_2 \end{array} \quad (\text{A.2.4})$$

**Definition A.2.4** (Kommutativität einer Algebra  $\mathcal{A}$ ).

Eine Algebra heißt kommutativ oder ABELsch wenn das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu \\ & \mathcal{A} & \end{array} \quad (\text{A.2.5})$$

wobei  $\tau : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ , der Vertauschungsoperator oder Flip, zwei Argumente vertauscht  $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$ . Die Kommutativität von  $\mathcal{A}$  bedeutet also  $\mu \circ \tau = \mu$  für alle Elemente der Algebra.

Wir führen daher hier eine neue Multiplikation ein, die sich im Hinblick auf Koalgebren und HOPF-Algebren als nützlich erweisen wird  $\mu^{\text{op}} := \mu \circ \tau$ .

**Definition A.2.5** (Zentrum  $\mathfrak{Z}(\mathcal{A})$  einer Algebra  $\mathcal{A}$ ).

Die Elemente  $z \in \mathcal{A}$  für die  $\mu(a \otimes z) = \mu^{\text{op}}(a \otimes z)$  für alle  $a \in \mathcal{A}$  ist, bezeichnen wir als Zentrum  $\mathfrak{Z}(\mathcal{A})$  der Algebra  $\mathcal{A}$ .

**Bemerkung A.2.6.**

Offensichtlich ist eine Algebra  $\mathcal{A}$  genau dann kommutativ, falls  $\mathfrak{Z}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ .

## Koalgebra

Unter einer Koalgebra versteht man nun das Duale einer Algebra. Salopp gesprochen bedeutet dies, daß man alle Pfeile in den Diagrammen (A.2.2) umdreht. Im folgenden werden wir eine mathematische Definition angeben.

**Definition A.2.7** (Koalgebra).

Eine koassoziative Koalgebra mit einer Koeins  $(\mathcal{K}, \Delta, \varepsilon)$  über einem kommutativen Ring  $\mathcal{C}$  ist ein  $\mathcal{C}$ -Modul  $\mathcal{K}$  mit zwei  $\mathcal{C}$ -Modul Abbildungen:

- i.)  $\Delta : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$  der Komultiplikation und
- ii.)  $\varepsilon : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$  der Koeins,

mit den Eigenschaften

$$(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \quad \text{und} \quad (\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \text{id}, \quad (\text{A.2.6})$$

was der Kommutativität der folgenden Diagramme entspricht:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{K} & \xleftarrow{\Delta \otimes \text{id}} & \mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \\ \uparrow \text{id} \otimes \Delta & & \uparrow \Delta \\ \mathcal{K} \otimes \mathcal{K} & \xleftarrow{\Delta} & \mathcal{K} \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{C} \otimes \mathcal{K} & \xleftarrow{\varepsilon \otimes \text{id}} & \mathcal{K} \otimes \mathcal{K} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} & \mathcal{K} \otimes \mathcal{C} \\ & \searrow & \uparrow \Delta & \swarrow & \\ & & \mathcal{K} & & \end{array}$$

Für die Komultiplikation verwenden wir die Notation von SWEEDLER [1969]. Dies bedeutet, daß wir für alle  $k \in \mathcal{K}$  die Komultiplikation als

$$\Delta(k) = \sum_i k_{i(1)} \otimes k_{i(2)} \quad (\text{A.2.7})$$

schreiben werden. Um die Schreibweise noch ein wenig zu vereinfachen, beziehungsweise übersichtlicher zu gestalten, werden wir auf den Summationsindex  $i$  und das Summenzeichen verzichten. Gelegentlich brauchen wir den Ausdruck  $\tau \circ \Delta$ , der so wichtig ist, daß er von uns ein eigenes Symbol bekommt:

$$\Delta^{\text{op}}(k) := \tau \circ \Delta(k) = \sum_i k_{i(2)} \otimes k_{i(1)}. \quad (\text{A.2.8})$$

Die Koassoziativität schreibt sich dann explizit für  $k \in \mathcal{K}$ , unter Verwendung von SWEEDLERS Notation:

$$k_{(1)} \otimes k_{(2)(1)} \otimes k_{(2)(2)} = k_{(1)(1)} \otimes k_{(1)(2)} \otimes k_{(2)} = k_{(1)} \otimes k_{(2)} \otimes k_{(3)}. \quad (\text{A.2.9})$$

**Definition A.2.8** (Kokommutativität einer Koalgebra  $\mathcal{K}$ ).

Man nennt eine Koalgebra  $\mathcal{K}$  kokommutativ, falls  $\Delta^{\text{op}} = \Delta$  für alle  $k \in \mathcal{K}$  ist. Diese Aussage ist äquivalent dazu, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{K} & \\ \Delta \swarrow & & \searrow \Delta \\ \mathcal{K} \otimes \mathcal{K} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}. \end{array} \quad (\text{A.2.10})$$

**Definition A.2.9** (Koalgebromorphismus).

Ein Koalgebromorphismus  $f : (\mathcal{K}_1, \Delta_1, \varepsilon_1) \rightarrow (\mathcal{K}_2, \Delta_2, \varepsilon_2)$  ist eine lineare Abbildung, so daß

$$(f \otimes f) \circ \Delta_1 = \Delta_2 \circ f \quad \text{und} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \circ f. \quad (\text{A.2.11})$$



Dies entspricht der Kommutativität der folgenden Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{K}_1 & \xrightarrow{f} & \mathcal{K}_2 \\
 \Delta_1 \downarrow & & \downarrow \Delta_2 \\
 \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_1 & \xrightarrow{f \otimes f} & \mathcal{K}_2 \otimes \mathcal{K}_2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{K}_1 & \xrightarrow{f} & \mathcal{K}_2 \\
 \varepsilon_1 \searrow & & \swarrow \varepsilon_2 \\
 & \mathcal{C} &
 \end{array}
 \tag{A.2.12}$$

**Definition A.2.10** (Primitive und gruppenartige Elemente in einer Koalgebra).

Sei  $(\mathcal{K}, \Delta, \varepsilon)$  eine Koalgebra. Ein Element  $k \in \mathcal{K}$  nennt man

- i.) primitiv, falls  $\Delta(k) = 1 \otimes k + k \otimes 1$  ist. Die Menge aller primitiven Elemente der Koalgebra  $\mathcal{K}$  bezeichnen wir mit  $\text{Prim}(\mathcal{K}) = \{k \in \mathcal{K} \mid \Delta(k) = 1 \otimes k + k \otimes 1\}$ .
- ii.) gruppenartig, falls  $\Delta(k) = k \otimes k$  ist.

**Beispiel A.2.11** (Der Ring  $\mathcal{C}$  ist Koalgebra).

Der Ring  $\mathcal{C}$  ist eine kokommutative Koalgebra über sich selbst mit  $\varepsilon(\mathcal{C}) = \text{id}_{\mathcal{C}}$  und  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$  als natürlichen Isomorphismus.

## Bialgebra

Wie schon zu Beginn des Kapitels erwähnt, versteht man unter einer Bialgebra eine Menge, die sowohl Algebra als auch Koalgebra ist. Beide Strukturen müssen miteinander verträglich sein.

**Definition A.2.12** (Bialgebra).

Eine Bialgebra  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$  über einem Ring  $\mathcal{C}$  ist sowohl eine Algebra als auch eine Koalgebra. Die Kompatibilitätsbedingungen lauten

- i.)  $\Delta \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ (\text{id} \otimes \tau \otimes \text{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)$  und  $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$ ,
- ii.)  $\varepsilon \circ \mu = \mu_{\mathcal{C}} \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon)$  und  $\varepsilon(1_H) = 1_{\mathcal{C}}$ .

Dabei bezeichnen wir mit  $\mu_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  die gewöhnliche Multiplikation im Ring  $\mathcal{C}$ . Damit sind die Abbildungen  $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$  und  $\varepsilon : H \rightarrow \mathcal{C}$  Algebromorphismen. Dies ist äquivalent dazu, daß  $\mu : H \otimes H \rightarrow H$  und  $\eta : \mathcal{C} \rightarrow H$  Koalgebromorphismen sind.

## A.2.2 HOPF-\* -Algebren

### Einige Definitionen

**Definition A.2.13** (Antipodenabbildung  $S$  und HOPF-Algebra).

Gegeben sei eine Bialgebra  $(H, \mu, \varepsilon, \Delta, \eta)$  über einem Ring  $\mathcal{C}$ . Sei  $S : H \rightarrow H$  eine lineare Abbildung, die die folgenden Bedingungen erfüllt

$$\mu \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta = \mu \circ (\text{id} \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon. \tag{A.2.13}$$

so nennen wir  $S$  eine Antipodenabbildung oder kurz Antipode. Eine Bialgebra mit einer Antipode  $S : H \rightarrow H$  nennt man HOPF-Algebra.

Die Eigenschaften der Antipodenabbildung einer HOPF-Algebra wollen wir in der folgenden Proposition zusammenfassen.

**Proposition A.2.14** (Eigenschaften der Antipode).

Gegeben sei eine HOPF-Algebra  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ , dann hat die Antipode  $S$  folgende Eigenschaften für alle Elemente in  $H$ .

- i.) Die Antipode  $S$  ist eindeutig.
- ii.)  $S \circ \mu = \mu \circ (S \otimes S) \circ \tau$  und  $S(1_H) = 1_H$ , d. h.  $S$  ist ein Algebraantiautomorphismus.
- iii.)  $(S \otimes S) \circ \Delta = \Delta^{\text{op}} \circ S$  und  $\varepsilon \circ S = \varepsilon$ , d. h.  $S$  ist ein Koalgebraantiautomorphismus.

*Beweis.* Der Beweis findet sich zum Beispiel in [KASSEL 1995, Theorem III.3.4].  $\square$

**Bemerkungen A.2.15** (Antipode).

- i.) Die Antipode ist vergleichbar mit einer Inversen, jedoch ist durch die Existenz einer solchen Abbildung nicht gesichert, daß  $S \circ S = \text{id}$ . Allerdings gilt für alle kommutativen und / oder kokommutativen HOPF-Algebren  $S \circ S = \text{id}$ . Ferner ist nicht einmal gefordert, daß  $S$  als lineare Abbildung ein Inverses  $S^{-1}$  besitzen muß, allerdings ist dies bei endlichdimensionalen Bialgebren mit einer Antipode immer der Fall.
- ii.) Jede endlichdimensionale HOPF-Algebra ist genau dann halbeinfach, wenn der Ring  $\mathbb{C}$  die Charakteristik 0 hat und  $S \circ S = \text{id}$  gilt [MAJID 1995, Seite 33f].

Eine weitere Struktur mit der wir HOPF-Algebren ausstatten wollen ist eine  $*$ -Involution, das heißt einen antilinearen Antiautomorphismus.

**Definition A.2.16** (Die  $*$ -Involution).

Eine HOPF- $*$ -Algebra  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, I)$  ist eine HOPF-Algebra mit einem antilinearen Antiautomorphismus  $I : H \rightarrow H$ , der  $*$ -Involution, so daß für alle Elemente in  $H$  gilt:

- i.)  $I \circ \mu = \mu \circ (I \otimes I) \circ \tau$ ,
- ii.)  $I \circ I = \text{id}$ ,
- iii.)  $\Delta \circ I = (I \otimes I) \circ \Delta$ ,
- iv.)  $\varepsilon \circ I = I_{\mathbb{C}} \circ \varepsilon$ ,
- v.)  $S \circ I \circ S \circ I = \text{id}$ .

Dabei bezeichnen wir mit  $I_{\mathbb{C}}$  die gewöhnliche komplexe Konjugation im Ring  $\mathbb{C}$ .

**Lemma A.2.17** (Invertierbarkeit der Antipode).

Sei  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, I)$  eine HOPF- $*$ -Algebra, so ist die Antipode  $S$  invertierbar.

*Beweis.* Die Invertierbarkeit der Antipode ist eine einfache Konsequenz aus Definition A.2.16 ii.) und v.).  $\square$

Auch wenn die Formulierung mittels (argumentfreien) Abbildungen sehr ästhetisch ist, so zeigt sie sich als etwas umständlich, wenn man konkrete Rechnungen angeht. Daher werden wir dazu übergehen eine kürzere und intuitivere Notation zu nutzen.

**Definition A.2.18** (HOPF- $*$ -Algebra).

Unter einer HOPF- $*$ -Algebra  $(H, \cdot, \eta, \Delta, \varepsilon, S, *)$  über einem Ring  $\mathbb{C}$  versteht man eine Menge  $H$  mit einer assoziativen Multiplikation  $\cdot : H \otimes H \rightarrow H$ , einer koassoziativen Komultiplikation  $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$ , einer Eins  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow H$ , einer Koeins  $\varepsilon : H \rightarrow \mathbb{C}$ , der linearen Antipode  $S : H \rightarrow H$  und einer antilinearen Involution  $*$  :  $H \rightarrow H$ , so daß, die folgenden Bedingungen für alle  $g, h \in H$  erfüllt sind:

- i.)  $\Delta(gh) = \Delta(g)\Delta(h)$ ,  $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$ ,
- ii.)  $\varepsilon(gh) = \varepsilon(g)\varepsilon(h)$ ,  $\varepsilon(1_H) = 1_C$ ,
- iii.)  $S(g_{(1)})g_{(2)} = g_{(1)}S(g_{(2)}) = 1_H$ ,  $S(1_H) = 1_H$ ,  $S(gh) = S(h)S(g)$ ,  $\varepsilon(S(g)) = \varepsilon(g)$ ,
- iv.)  $(gh)^* = h^*g^*$ ,  $(g^*)^* = g$ ,  $\Delta(g^*) = \Delta(g)^{* \otimes *}$ ,  $\varepsilon(g^*) = \overline{\varepsilon(g)}$ ,  $S(S(g^*)^*) = g$ .

Dabei haben wir bei der Multiplikation in der Algebra  $(H, \cdot, \eta, \Delta, \varepsilon, S, *)$  und im Ring  $C$  auf den Punkt verzichtet<sup>2</sup>.

**Definition A.2.19** (HOPF-\* -Algebra Homomorphismus).

Seien  $H$  und  $H'$  HOPF-\* -Algebren, so ist die Abbildung  $\varphi : H \rightarrow H'$  ein HOPF-\* -Algebra Homomorphismus, falls  $\varphi$  ein \*-Homomorphismus für die Algebrastruktur und die Koalgebrastruktur ist und zusätzlich  $S_{H'} \circ \varphi = \varphi \circ S_H$  gilt.

**Bemerkung A.2.20** (HOPF-\* -Algebren über formalen Potenzreihen).

Sei der Ring  $C[[\lambda]]$  eine formale Potenzreihe in einem formalen Parameter  $\lambda$ , so ist die HOPF-\* -Algebra  $H$  ein  $C[[\lambda]]$ -Modul mit den  $C[[\lambda]]$ -linearen Abbildungen  $(\cdot, \eta, \Delta, \varepsilon, S, *)$ . Dabei ist das algebraische Tensorprodukt aus Definition A.2.16 (bzw. Definition A.2.18) durch das in der  $\lambda$ -adischen Topologie vervollständigte zu ersetzen.

**Bemerkung A.2.21** (Gradierte HOPF-Algebren, [CHARI & PRESSLEY 1994]).

Wir können auch eine gradierte Version von HOPF-\* -Algebren formulieren. Dann ist

$$H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n. \quad (\text{A.2.14})$$

Die so definierte *gradierte HOPF-\* -Algebra über dem Ring  $C$*  erfüllt die gewöhnlichen Axiome, allerdings gilt

$$\tau(h \otimes g) = (-1)^{mn} g \otimes h, \quad \text{für } h \in H_n, g \in H_m.$$

Desweiteren müssen die HOPF-Abbildungen die Gradierung respektieren, d. h. es gilt  $\eta(c) \subset H_0$  für  $c \in C$ ,  $\varepsilon(H_n) = 0$  für  $n > 0$ ,  $S(H_n) = H_n$ ,  $H_n^* = H_n$ ,  $\mu(H_n \otimes H_m) \subset H_{n+m}$  und  $\Delta(H_n) \subset \bigoplus_{p+q=n} H_p \otimes H_q$ .

**Definition A.2.22** (HOPF-Ideal).

Ein HOPF-Ideal einer HOPF-Algebra  $H$  über einem Ring  $C$  ist ein zweiseitiges Ideal  $\mathcal{I}$  von  $H$ , so daß

$$\Delta(\mathcal{I}) = \mathcal{I} \otimes H + H \otimes \mathcal{I}, \quad \varepsilon(\mathcal{I}) = 0, \quad S(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}. \quad (\text{A.2.15})$$

## Einige Beispiele

Nun wollen wir dieses abstrakte Konzept ein wenig mit Leben füllen und einige wichtige Beispiele anbringen. Insbesondere der Gruppenalgebra  $C[G]$  sowie der universell Einhüllenden der LIE-Algebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  kommen eine wichtige Bedeutung zu, da sie die in der Physik relevanten Beispiele für HOPF-Algebren darstellen.

---

<sup>2</sup>Wenn wir von einer HOPF-Algebra oder von einer HOPF-\* -Algebra  $H$  reden, dann sparen wir uns meist die Arbeit alle Strukturen (Multiplikation, Komultiplikation, Eins, Koeins, Antipode und Involution) aufzuführen, da dies klar sein sollte.

**Beispiel A.2.23** (Tensorprodukt zweier Koalgebren).

Seien  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  Koalgebren, so ist auch  $\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2$  eine Koalgebra. Es gilt:  $\Delta_{\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2}(k_1 \otimes k_2) = \Delta_{\mathcal{K}_1}(k_1) \otimes \Delta_{\mathcal{K}_2}(k_2)$  und  $\varepsilon_{\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2}(k_1 \otimes k_2) = \varepsilon_{\mathcal{K}_1}(k_1) \varepsilon_{\mathcal{K}_2}(k_2)$ . Sind  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  sogar HOPF-Algebren, so ist  $S_{\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2} = S_{\mathcal{K}_1} \otimes S_{\mathcal{K}_2}$ , und  $\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2$  ist ebenfalls eine HOPF-Algebra. Die Notation  $\Delta_{13} \Delta_{24}$  ist das gleiche wie  $(\text{id} \otimes \tau \otimes \text{id}) \circ (\Delta_{\mathcal{K}_1} \otimes \Delta_{\mathcal{K}_2})$ .

**Beispiel A.2.24** (Die Gruppenalgebra  $\mathbb{C}[G]$ ).

Sei  $G$  eine Gruppe. Die Gruppenalgebra  $\mathbb{C}[G]$  von  $G$  über einem Ring  $\mathbb{C}$  ist ein freier  $\mathbb{C}$ -Modul, und die HOPF-Algebrastruktur ist gegeben durch:  $\eta(1_G) = e$ ,  $\varepsilon(g) = 1_G$ ,  $\Delta(g) = g \otimes g$ ,  $S(g) = g^{-1}$ . Offensichtlich handelt es sich um eine HOPF\*-Algebra, wenn man  $g^* = g^{-1}$  definiert. Man sieht ferner, daß  $\mathbb{C}[G]$  immer kokommutativ ist, jedoch nur dann kommutativ, wenn die Gruppe  $G$  kommutativ ist.

**Beispiel A.2.25** (Die universell einhüllende Algebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ).

Sei  $\mathfrak{g}$  eine LIE-Algebra über  $\mathbb{R}$ . Die universell einhüllende Algebra  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}$  über  $\mathbb{C}$  kann man als HOPF\*-Algebra auffassen<sup>3</sup>. Um die Struktur zu verstehen, reicht es sich die Strukturabbildungen auf den Elementen von  $\mathfrak{g}$  anzusehen. Sei  $\xi \in \mathfrak{g}$ :  $\varepsilon(\xi) = 0$ ,  $\Delta(\xi) = 1 \otimes \xi + \xi \otimes 1$ ,  $S(\xi) = -\xi$ . Mit  $\xi^* = -\xi$  wird  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  zu einer HOPF\*-Algebra.

Weitere Eigenschaften zu einhüllenden Algebren findet man in [DIXMIER 1977].

**Beispiel A.2.26** ( $\mathbb{C}$ -wertige Funktionen auf der Gruppe  $G$ ).

Seien  $\mathcal{F}(G)$  die  $\mathbb{C}$ -wertigen Funktionen auf der Gruppe  $G$ . Wir definieren die  $\mathbb{C}$ -Modul- und Algebrastruktur punktweise und für  $f \in \mathcal{F}(G)$  sei  $\varepsilon(f) = f(e)$ ,  $S(f)(g) = f(g^{-1})$ ,  $\Delta(f)(g_1, g_2) = f(g_1 \cdot g_2)$ .

**Beispiel A.2.27** (Nicht (ko)kommutative HOPF-Algebra, [MAJID 1995, Example 1.3.2]).

Wir betrachten die Algebra, die durch die 1 und die drei Elemente  $X, g, g^{-1}$  über einem Körper  $\mathbb{K}$  durch die Relationen

$$gg^{-1} = 1 = g^{-1}g, \quad Xg = qgX, \quad Xg^{-1} = q^{-1}g^{-1}X$$

erzeugt wird. Dabei sei  $q$  ein invertierbares Element des Körpers  $\mathbb{K}$ . Diese Algebra wird zu einer HOPF-Algebra durch

$$\begin{aligned} \Delta(X) &= X \otimes 1 + g \otimes X, & \Delta(g) &= g \otimes g, & \Delta(g^{-1}) &= g^{-1} \otimes g^{-1}, \\ \varepsilon(X) &= 0, & \varepsilon(g) &= \varepsilon(g^{-1}) = 1, & S(X) &= -g^{-1}X, & S(g) &= g^{-1}, & S(g^{-1}) &= g. \end{aligned}$$

Diese Algebra ist weder kommutativ noch kokommutativ und nach Bemerkung A.2.15 nicht halbeinfach, da  $S \circ S(X) = qX \neq X$ .

### A.2.3 Wirkungen von HOPF-Algebren auf Algebren

**Definition A.2.28** (Wirkung einer HOPF-Algebra).

Eine Linkswirkung  $\ell : H \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  einer HOPF-Algebra  $(H, \mu, \Delta, \varepsilon, \eta, S)$  auf eine Algebra  $(\mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$  mit Einselement ist eine lineare Abbildung, und es gilt für alle  $g, h \in H$  und  $a, b \in \mathcal{A}$ :

<sup>3</sup>Die genaue Definition einer universell einhüllenden Algebra wird später im Rahmen von universellen Objekten Definition A.3.5 geben.

- i.)  $\ell \circ (\mu \otimes \text{id})(g \otimes h \otimes a) = \ell \circ (\text{id} \otimes \ell)(g \otimes h \otimes a)$
- ii.)  $\ell \circ (\text{id} \otimes \mu_{\mathcal{A}})(h \otimes a \otimes b) = \mu_{\mathcal{A}} \circ (\ell \otimes \ell) \circ (\text{id} \otimes \tau \otimes \text{id}) \circ (\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(h \otimes a \otimes b)$
- iii.)  $\ell(1_H \otimes a) = a$
- iv.)  $\ell(h \otimes 1_{\mathcal{A}}) = \varepsilon(h)1_{\mathcal{A}}$

Die Algebra  $\mathcal{A}$  ist damit eine  $H$ -Linksmodulalgebra, und wir bezeichnen die  $H$ -Linksmodulalgebra mit  $(H, \mathcal{A}, \ell)$  <sup>4</sup>.

Wie bereits im letzten Kapitel, werden wir auch diese Notation vereinfachen und dazu die Wirkung mit  $\triangleright$  bezeichnen, d. h.  $\ell(h \otimes a) =: h \triangleright a$ . Die obigen Bedingungen werden damit zu

- i.)  $(gh) \triangleright a = g \triangleright (h \triangleright a),$
- ii.)  $h \triangleright (ab) = (h_{(1)} \triangleright a)(h_{(2)} \triangleright b),$
- iii.)  $1_H \triangleright a = a,$
- iv.)  $h \triangleright 1_{\mathcal{A}} = \varepsilon(h)1_{\mathcal{A}}.$

Sind nun sowohl die HOPF-Algebra  $H$  als auch die Algebra  $\mathcal{A}$  mit einer \*-Struktur ausgestattet, so möchten wir auch eine damit verträgliche Wirkung  $\triangleright$  haben.

**Definition A.2.29.**

Sei nun  $(H, \mathcal{A}, \triangleright)$  eine  $H$ -Linksmodulalgebra und sowohl  $H$  als auch  $\mathcal{A}$  seien mit einer \*-Struktur ausgestattet. Man nennt  $\triangleright$  eine \*-Wirkung, falls

$$(h \triangleright a)^* = S(h)^* \triangleright a^* \quad (\text{A.2.16})$$

Wir haben nun eine abstrakte Definition für Wirkungen von HOPF-Algebren auf Algebren gegeben. Nun wollen wir einige Beispiele für konkrete Wirkungen angeben – ohne allerdings die HOPF-\* -Algebra zu spezifizieren.

**Beispiel A.2.30** (Triviale Wirkung).

Sei nun  $\mathcal{A}$  eine \*-Algebra. Die *triviale Wirkung* einer HOPF-\* -Algebra ist gegeben durch

$$h \triangleright a = \varepsilon(h)a, \quad (\text{A.2.17})$$

für alle Elemente  $a \in \mathcal{A}$ . Man kann leicht sehen, daß es sich hierbei um eine \*-Wirkung handelt.

**Beispiel A.2.31** (Adjungierte Wirkung).

Sei  $H$  eine HOPF-\* -Algebra. Die *adjungierte Wirkung* einer HOPF-\* -Algebra auf sich selbst ist gegeben durch:

$$\text{ad}(g)(h) := g_{(1)}hS(g_{(2)}). \quad (\text{A.2.18})$$

*Beweis.* Hier werden wir nun zeigen, daß es sich wirklich um eine Wirkung handelt. Dazu muß man die Gleichungen aus Definition A.2.28, sowie die \*-Bedingung (Gleichung (A.2.16)) nachrechnen. Seien nun  $h, g, g', k \in H$ . Es ist trivial zu zeigen, daß  $\text{ad}(1_H)(h) = 1_HhS(1_H) = h$  und  $\text{ad}(g)(1_H) = g_{(1)}1_HS(g_{(2)}) = \varepsilon(g)1_H$  ist.

---

<sup>4</sup>Analog kann man auch eine  $H$ -Rechtsmodulalgebra  $(H, \mathcal{A}, r)$  definieren, wobei  $r : \mathcal{A} \otimes H \rightarrow \mathcal{A}$  eine Rechtswirkung ist. Bei den später definierten Cross-Produktalgebren kann man ähnlich verfahren und ebenso eine Cross-Produktalgebra betrachten, das auf einem  $H$ -Rechtsmodul basiert und die Form  $H \ltimes \mathcal{A}$  hat.

$$\begin{aligned}
\text{ad}(gg')(h) &= (gg')_{(1)} h S((gg')_{(2)}) \\
&= g_{(1)} g'_{(1)} h S(g_{(2)} g'_{(2)}) \\
&= g_{(1)} g'_{(1)} h S(g'_{(2)}) S(g_{(2)}) \\
&= g_{(1)} \text{ad}(g')(h) S(g_{(2)}) \\
&= \text{ad}(g) \circ \text{ad}(g')(h),
\end{aligned}$$

ferner müssen wir zeigen, daß

$$\begin{aligned}
\text{ad}(g)(hk) &= g_{(1)} h k S(g_{(2)}) \\
&= g_{(1)} h S(g_{(2)}) g_{(3)} k S(g_{(4)}) \\
&= \text{ad}(g)(h) \text{ad}(g)(k)
\end{aligned}$$

und nun noch die Verträglichkeit mit der \*-Struktur

$$\begin{aligned}
(\text{ad}(g)(h))^* &= (g_{(1)} h S(g_{(2)}))^* \\
&= S(g_{(2)})^* h^* g_{(1)}^* \\
&= S(g_{(2)})^* h^* S(S(g_{(1)}^*)^*) \\
&= S(g)_{(1)}^* h^* S(S(g)_{(2)}^*) \\
&= \text{ad}(S(g)^*)(h^*).
\end{aligned}$$

□

**Beispiel A.2.32** (Innere Wirkung auf Algebra mittels \*-Homomorphismus).

Sei  $\mathcal{A}$  eine \*-Algebra,  $H$  eine HOPF-\*-Algebra  $J : H \rightarrow \mathcal{A}$  ein \*-Homomorphismus (Impulsabbildung), d. h. es gilt für alle  $g, h \in H$

$$J(g)J(h) = J(gh), \quad J(1_H) = 1_{\mathcal{A}}, \quad J(g^*) = J(g)^*. \quad (\text{A.2.19})$$

Dann ist

$$h \triangleright a := J(h_{(1)}) a J(S(h_{(2)})) \quad (\text{A.2.20})$$

eine \*-Wirkung.

*Beweis.* Der Beweis dazu erfolgt analog zu Beispiel A.2.31. □

Die Wirkung in Gleichung (A.2.20) ist trivial, wenn die Algebra  $\mathcal{A}$  kommutativ ist, da

$$J(h_{(1)}) a J(S(h_{(2)})) = J(h_{(1)} S(h_{(2)})) a = \varepsilon(h) J(1_H) a = a.$$

Wir wollen das am Beispiel einer LIE-Algebra und einer Gruppe verdeutlichen. Gleichung (A.2.20) geht in den beiden Fällen über zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\xi} a &= [J_{\xi}, a], \quad \text{mit } \xi \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \text{ und } J_{\xi} \in \mathcal{A}, \\
\Phi_g a &= U_g a U_g^{-1}, \quad \text{mit } g \in \mathbb{C}[G] \text{ und } U_g \in \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

### A.2.4 Die Gruppen $\mathrm{GL}(H, \mathcal{A})$ , $\mathrm{GL}_0(H, \mathcal{A})$ , $\mathrm{U}(H, \mathcal{A})$ und $\mathrm{U}_0(H, \mathcal{A})$

Alle Beweise zu diesem Kapitel findet man ausführlich in [JANSEN & WALDMANN 2006]. Weitere Konvolutionsprodukte findet man beispielsweise in [KASSEL 1995; MAJID 1995].

#### Definitionen und grundlegende Eigenschaften

Seien  $H$  eine HOPF-\* -Algebra und  $\mathcal{A}$  eine \*-Algebra. Wir schauen uns  $\mathrm{Hom}_c(H, \mathcal{A})$  mit dem *Konvolutionsprodukt*

$$(\mathbf{a} * \mathbf{b})(h) = \mathbf{a}(h_{(1)})\mathbf{b}(h_{(2)}) \quad (\text{A.2.21})$$

an, wobei  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathrm{Hom}_c(H, \mathcal{A})$  und  $h \in H$ .

**Definition A.2.33** (Definition von  $\mathrm{GL}(H, \mathcal{A})$  und  $\mathrm{U}(H, \mathcal{A})$ ).

Ein Element  $\mathbf{a} \in \mathrm{Hom}_c(H, \mathcal{A})$  gehört zu  $\mathrm{GL}(H, \mathcal{A})$ , falls für alle  $g, h \in H$  und  $b \in \mathcal{A}$  gilt

- i.)  $\mathbf{a}(1_H) = 1_{\mathcal{A}}$  (Normierung),
- ii.)  $\mathbf{a}(gh) = \mathbf{a}(g_{(1)})(g_{(2)} \triangleright \mathbf{a}(h))$  (Wirkungsbedingung),
- iii.)  $(h_{(1)} \triangleright b)\mathbf{a}(h_{(2)}) = \mathbf{a}(h_{(1)})(h_{(2)} \triangleright b)$  (Modulbedingung).

Wir bezeichnen mit  $\mathrm{U}(H, \mathcal{A})$  all die Elemente, die zusätzlich noch

- iv.)  $\mathbf{a}(h_{(1)})(\mathbf{a}(S(h_{(2)}))^*)^* = \varepsilon(h)1_{\mathcal{A}}$  (Unitaritätsbedingung).

erfüllen.

#### Proposition A.2.34.

Die Menge  $\mathrm{GL}(H, \mathcal{A})$  ist bezüglich des Konvolutionsprodukts eine Gruppe, und  $\mathrm{U}(H, \mathcal{A})$  wird zu einer Untergruppe der invertierbaren Elemente von  $\mathrm{GL}(\mathrm{Hom}_c(H, \mathcal{A}), *)$ . Das Inverse eines Elements  $\mathbf{a} \in \mathrm{GL}(H, \mathcal{A})$  ist gegeben durch

$$\mathbf{a}^{-1}(h) = h_{(2)} \triangleright \mathbf{a}(S^{-1}(h_{(1)})). \quad (\text{A.2.22})$$

#### Bemerkung A.2.35.

Die Gruppe  $\mathrm{U}(H, \mathcal{A})$  ist für jede Wirkung einer HOPF-\* -Algebra  $H$  auf eine assoziative \*-Algebra  $\mathcal{A}$  mit Einselement  $1_{\mathcal{A}}$  definiert, bei der die Antipodenabbildung  $S : H \rightarrow H$  invertierbar ist. Für die Gruppe  $\mathrm{U}(H, \mathcal{A})$  benötigen wir die \*-Involution auf  $H$  und  $\mathcal{A}$ .

**Definition A.2.36** (Die ABELSche Gruppen  $\mathrm{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))$  und  $\mathrm{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))$ ).

Man bezeichnet die Menge aller zentralen und invertierbaren Elemente von  $\mathcal{A}$  mit  $\mathrm{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))$ , und alle unitären und zentralen Elemente von  $\mathcal{A}$  mit  $\mathrm{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))$ .

$$\mathrm{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A})) = \{a \in \mathcal{A} \mid ab = ba \ \forall b \in \mathcal{A}, \exists a^{-1} \in \mathcal{A}, \text{ so daß } a^{-1}a = aa^{-1} = 1_{\mathcal{A}}\} \quad (\text{A.2.23})$$

$$\mathrm{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A})) = \{a \in \mathcal{A} \mid ab = ba \ \forall b \in \mathcal{A}, \exists a^* \in \mathcal{A}, \text{ so daß } a^*a = aa^* = 1_{\mathcal{A}}\} \quad (\text{A.2.24})$$

Desweiteren wollen wir die  $H$ -invarianten Elemente in  $\mathrm{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))$  bzw.  $\mathrm{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))$  mit  $\mathrm{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))^H$  bzw.  $\mathrm{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))^H$  bezeichnen.

#### Proposition A.2.37.

Sei  $c \in \mathrm{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))$ . Wir definieren via

$$\hat{c}(h) := c(h \triangleright c^{-1}) \quad (\text{A.2.25})$$

ein Element  $\hat{c} \in \mathrm{GL}(H, \mathcal{A})$ , und  $c \mapsto \hat{c}$  ist ein Gruppenhomomorphismus, so daß

$$1 \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))^H \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A})) \xrightarrow{\hat{\phantom{x}}} \mathrm{GL}(H, \mathcal{A}) \quad (\text{A.2.26})$$

eine exakte Sequenz ist. Analog verhält es sich für  $c \in \mathrm{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))$  und  $\hat{c} \in \mathrm{U}(H, \mathcal{A})$ . Das heißt

$$1 \longrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))^H \longrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A})) \xrightarrow{\hat{\phantom{x}}} \mathrm{U}(H, \mathcal{A}) \quad (\text{A.2.27})$$

ist auch eine exakte Sequenz von Gruppenhomomorphismen.

**Definition A.2.38** (Die Quotientengruppen  $\mathrm{GL}_0(H, \mathcal{A})$  und  $\mathrm{U}_0(H, \mathcal{A})$ ).

Wir definieren die Quotientengruppen  $\mathrm{GL}_0(H, \mathcal{A})$  und  $\mathrm{U}_0(H, \mathcal{A})$  indem wir das Bild von  $\mathrm{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))$  bzw.  $\mathrm{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))$  unter  $\hat{\phantom{x}}$  herausteilen.

$$\mathrm{GL}_0(H, \mathcal{A}) = \mathrm{GL}(H, \mathcal{A}) / \widehat{\mathrm{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))} \quad (\text{A.2.28})$$

$$\mathrm{U}_0(H, \mathcal{A}) = \mathrm{U}(H, \mathcal{A}) / \widehat{\mathrm{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))} \quad (\text{A.2.29})$$

Die Definition A.2.38 ist möglich, da  $\mathrm{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))$  und  $\mathrm{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))$  im Zentrum liegen und daher Normalteiler sind. Die Sequenzen (A.2.26) und (A.2.27) können wir damit zu den beiden exakten Sequenzen

$$1 \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))^H \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A})) \xrightarrow{\hat{\phantom{x}}} \mathrm{GL}(H, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{GL}_0(H, \mathcal{A}) \longrightarrow 1 \quad (\text{A.2.30})$$

$$1 \longrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))^H \longrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A})) \xrightarrow{\hat{\phantom{x}}} \mathrm{U}(H, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{U}_0(H, \mathcal{A}) \longrightarrow 1 \quad (\text{A.2.31})$$

vervollständigen.

**Bemerkung A.2.39.**

Offensichtlich ist  $\mathrm{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A})) = \mathrm{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))^H$  und  $\mathrm{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A})) = \mathrm{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))^H$  falls die Algebra  $\mathcal{A}$  nur das triviale Zentrum  $\mathfrak{Z}(\mathcal{A}) = \mathbb{C}1_{\mathcal{A}}$  hat. Desweiteren sind in diesem Fall die Gruppen  $\mathrm{GL}(H, \mathcal{A}) = \mathrm{GL}_0(H, \mathcal{A})$  sowie  $\mathrm{U}(H, \mathcal{A}) = \mathrm{U}_0(H, \mathcal{A})$ .

**Proposition A.2.40.**

Seien  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  assoziative  $*$ -Algebren mit Einselement, und sei  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein  $H$ -äquivarianter, surjektiver Homomorphismus.

- i.) Für jedes  $\mathbf{a} \in \mathrm{GL}(H, \mathcal{A})$  ist  $\phi_* \mathbf{a} := \phi \circ \mathbf{a} \in \mathrm{GL}(H, \mathcal{B})$ .
- ii.) Die Abbildung  $\phi_* : \mathrm{GL}(H, \mathcal{A}) \rightarrow \mathrm{GL}(H, \mathcal{B})$  ist ein Gruppenhomomorphismus.
- iii.) Sei  $\psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  ein weiterer  $H$ -äquivarianter surjektiver Homomorphismus, dann ist  $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$  und  $(\mathrm{id}_{\mathcal{A}})_* = \mathrm{id}_{\mathrm{GL}(H, \mathcal{A})}$ .
- iv.) Der Gruppenhomomorphismus  $\phi_* : \mathrm{GL}(H, \mathcal{A}) \rightarrow \mathrm{GL}(H, \mathcal{B})$  induziert einen Gruppenhomomorphismus  $\mathrm{GL}_0(H, \mathcal{A}) \rightarrow \mathrm{GL}_0(H, \mathcal{B})$ , den wir auch mit  $\phi_*$  bezeichnen, so daß das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))^H & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A})) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(H, \mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_0(H, \mathcal{A}) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi_* & & \downarrow \phi_* & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{B}))^H & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{B})) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(H, \mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_0(H, \mathcal{B}) & \longrightarrow & 1. \end{array} \quad (\text{A.2.32})$$



v.) Ist  $\phi$  zusätzlich ein  $*$ -Homomorphismus, so kann man bei den Punkten i.) bis iv.) „GL“ durch „U“ ersetzen, insbesondere ist das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mathbf{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))^H & \longrightarrow & \mathbf{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A})) & \longrightarrow & \mathbf{U}(H, \mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathbf{U}_0(H, \mathcal{A}) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi_* & & \downarrow \phi_* & & \\
 1 & \longrightarrow & \mathbf{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{B}))^H & \longrightarrow & \mathbf{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{B})) & \longrightarrow & \mathbf{U}(H, \mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathbf{U}_0(H, \mathcal{B}) & \longrightarrow & 1.
 \end{array} \tag{A.2.33}$$

Man kann die Proposition A.2.40 auch anders auffassen, nämlich als eine Gruppoid-Wirkung auf eine exakte Sequenz.

### Korollar A.2.41.

Das Gruppoid der  $H$ -äquivarianten Isomorphismen  $\text{Iso}_H$  wirkt auf die exakte Sequenz A.2.26 via Isomorphismen. Die ganze Sequenz von Gruppen mit seiner  $\text{Aut}_H(\mathcal{A})$ -Wirkung ist eine Invariante der Algebra  $\mathcal{A}$  mit der  $H$ -Wirkung. Analog wirkt  $\text{Iso}_H^*$  durch Isomorphismen auf die exakte Sequenz A.2.27, wobei die gesamte Sequenz mit ihrer  $\text{Aut}_H^*(\mathcal{A})$ -Wirkung eine Invariante von  $\mathcal{A}$  als  $*$ -Algebra mit einer  $*$ -Wirkung von  $H$  ist.

### Der kokommutative Fall

In diesem Abschnitt wollen wir nun davon ausgehen, daß wir eine kokommutative HOPF- $*$ -Algebra gegeben haben. In diesem Fall vereinfacht sich das im letzten Abschnitt beschriebene. In unserer Konvention bilden Homomorphismen immer Einselemente auf Einselemente ab.

### Proposition A.2.42.

Sei  $H$  eine kokommutative HOPF- $*$ -Algebra und  $\mathcal{A}$  eine assoziative  $*$ -Algebra.

- i.)  $H \triangleright \mathfrak{Z}(\mathcal{A}) \subseteq \mathfrak{Z}(\mathcal{A})$ , d. h. zentrale Elemente in  $\mathcal{A}$  bleiben durch eine HOPF-Wirkung zentral.
- ii.) Für  $\mathbf{a} \in \text{GL}(H, \mathfrak{Z}(\mathcal{A}))$  ist  $\mathbf{a}(h) \in \mathfrak{Z}(\mathcal{A})$  für alle  $h \in H$ , daher gilt  $\text{GL}(H, \mathcal{A}) = \text{GL}(H, \mathfrak{Z}(\mathcal{A}))$  und  $\text{GL}_0(H, \mathcal{A}) = \text{GL}_0(H, \mathfrak{Z}(\mathcal{A}))$ . Analoges gilt für  $\mathbf{a} \in \mathbf{U}(H, \mathcal{A})$ .
- iii.) Die Gruppen  $\text{GL}(H, \mathcal{A})$ ,  $\text{GL}_0(H, \mathcal{A})$ ,  $\mathbf{U}(H, \mathcal{A})$  und  $\mathbf{U}_0(H, \mathcal{A})$  sind ABELSCH.
- iv.) Der Raum der Algebra-Homomorphismen  $H \rightarrow \mathfrak{Z}_H(\mathcal{A})$  ist eine Untergruppe von  $\text{GL}(H, \mathcal{A})$ , und der Raum der  $*$ -Homomorphismen  $H \rightarrow \mathfrak{Z}_H(\mathcal{A})$  ist eine Untergruppe von  $\mathbf{U}(H, \mathcal{A})$ . Das Inverse eines Homomorphismus  $\mathbf{a}$  ist gegeben durch  $\mathbf{a}^{-1}(h) = \mathbf{a}(S(h)) = \mathbf{a}(S^{-1}(h))$ .

*Beweis.* Der erste Teil der Proposition ist klar. Für den zweiten rechnen wir nach

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}(h)b &= \mathbf{a}(h_{(1)})\varepsilon(h_{(2)})b = \mathbf{a}(h_{(1)})((h_{(2)}S(h_{(3)})) \triangleright b) = (h_{(1)} \triangleright (S(h_{(3)}) \triangleright b))\mathbf{a}(h_{(2)}) = \varepsilon(h_{(1)})b\mathbf{a}(h_{(2)}) \\
 &= b\mathbf{a}(h),
 \end{aligned}$$

dabei nutzen wir sowohl die Kokommutativität der HOPF-Algebra wie auch die Modulbedingung aus Definition A.2.33. Der dritte Teil ist eine Konsequenz dessen und für den vierten gilt per Definition  $\mathbf{a} : H \rightarrow \mathfrak{Z}_H(\mathcal{A})$ ,  $\mathbf{a}(1_H) = 1_{\mathcal{A}}$  und

$$\mathbf{a}(gh) = \mathbf{a}(g)\mathbf{a}(h) = \mathbf{a}(g_{(1)})\varepsilon(g_{(2)})\mathbf{a}(h) = \mathbf{a}(g_{(1)})(g_{(2)} \triangleright \mathbf{a}(h)),$$

da  $\mathbf{a}(h)$   $H$ -invariant ist. Außerdem ist

$$(h_{(1)} \triangleright b)\mathbf{a}(h_{(2)}) = \mathbf{a}(h_{(2)})(h_{(1)} \triangleright b) = \mathbf{a}(h_{(1)})(h_{(2)} \triangleright b),$$

da  $a(h_{(2)})$  zentral und  $H$  kokommutativ ist. Für den Fall, daß  $a$  ein  $*$ -Homomorphismus ist, gilt

$$a(h_{(1)})(a(S(h_{(2)}))^*)^* = a(h_{(1)})a(S(h_{(2)})) = a(h_{(1)}S(h_{(2)})) = \varepsilon(h)1_{\mathcal{A}}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß für  $a, b : H \rightarrow \mathfrak{Z}_H(\mathcal{A})$  das Konvolutionsprodukt  $a * b$  wieder ein Homomorphismus ist, der Werte in  $\mathfrak{Z}_H(\mathcal{A})$  annimmt. Ferner gilt

$$a^{-1}(h) = \varepsilon(h_{(1)})a(S^{-1}(h_{(2)})) = a(S^{-1}(h)) = a(S(h)).$$

Da aufgrund der Kokommutativität von  $H$  für die Antipode  $S^2 = \text{id}$  gilt, und  $a(h)$  invariant ist, ist auch  $a^{-1}$  ein Homomorphismus, falls  $a$  ein  $*$ -Homomorphismus ist, da die Antipode  $S$  mit der  $*$ -Involution vertauscht.  $\square$

Die Algebrhomomorphismen

$$\chi : H \rightarrow \mathbb{C}, \tag{A.2.34}$$

also die Charaktere von  $H$ , tragen immer zur Gruppe  $\text{GL}(H, \mathcal{A})$  bei. Ist  $\chi$  zusätzlich ein  $*$ -Homomorphismus so nennen wir ihn einen *unitären Charakter*. Falls das Zentrum der Algebra  $\mathcal{A}$  trivial ist, dann bilden die Charaktere von  $H$  die ganze Gruppe  $\text{GL}(H, \mathcal{A})$ . Dies wollen wir in der folgenden Proposition festhalten.

**Proposition A.2.43.**

*Sei  $H$  eine kokommutative HOPF-Algebra.*

- i.) *Über die Abbildung  $\chi \mapsto a^\chi$  mit  $a^\chi(h) = \chi(h)1_{\mathcal{A}}$  bilden die Charaktere von  $H$  eine Untergruppe von  $\text{GL}(H, \mathcal{A})$ , und die unitären Charaktere von  $H$  bilden eine Untergruppe von  $\text{U}(H, \mathcal{A})$ .*
- ii.) *Ist das Zentrum von  $\mathcal{A}$  trivial, d. h.  $\mathfrak{Z}(\mathcal{A}) = \mathbb{C}1_{\mathcal{A}}$ , dann ist jedes Element von  $\text{GL}(H, \mathcal{A}) = \text{GL}_0(H, \mathcal{A})$  ein Charakter und jedes Element von  $\text{U}(H, \mathcal{A}) = \text{U}_0(H, \mathcal{A})$  ist ein unitärer Charakter.*

## A.3 Cross-Produktalgebren

**Definition A.3.1** (Die Cross-Produktalgebra  $\mathcal{A} \rtimes H$ ).

*Gegeben seien eine  $H$ -Linksmodulalgebra  $(H, \mathcal{A}, \triangleright)$ . Die assoziative Algebra  $\mathcal{A} \rtimes H = (\mathcal{A} \otimes H, \cdot)$  sei das Tensorprodukt  $\mathcal{A} \otimes H$  ausgestattet mit der Multiplikation  $\cdot$ , so daß für alle  $g, h \in H$  und  $a, b \in \mathcal{A}$  gilt*

$$(a \otimes g) \cdot (b \otimes h) = a(g_{(1)} \triangleright b) \otimes g_{(2)}h. \tag{A.3.1}$$

*Wir bezeichnen eine solche Algebra als Cross-Produktalgebra oder als Cross-Produkt. In der Literatur findet man auch den Begriff des Smash-Produkts.*

**Bemerkungen A.3.2.**

- i.) Die Assoziativität läßt sich leicht nachrechnen. Dazu brauchen wir die Koassoziativität der HOPF-Algebra, sowie die Definitionen des  $H$ -Linksmoduls  $(H, \mathcal{A}, \triangleright)$ .

ii.) Ist die Algebra  $\mathcal{A}$  mit einem Einselement  $1_{\mathcal{A}}$  ausgestattet, so ist  $1_{\mathcal{A}} \otimes 1_H$  das Einselement in  $\mathcal{A} \rtimes H$ , denn offensichtlich gilt

$$(1_{\mathcal{A}} \otimes 1_H) \cdot (a \otimes h) = 1_{\mathcal{A}}(1_H \triangleright a) \otimes 1_H h = a \otimes h = a(h \triangleright 1_{\mathcal{A}}) \otimes h 1_H = (a \otimes h) \cdot (1_{\mathcal{A}} \otimes 1_H).$$

Im Rahmen von  $*$ -Algebren und HOPF- $*$ -Algebren möchten wir auch eine  $*$ -Struktur auf einer Cross-Produktalgebra  $\mathcal{A} \rtimes H$  definieren. Diese bekommen wir auf natürliche Weise geschenkt, wenn  $\mathcal{A}$  eine  $*$ -Algebra und  $H$  eine HOPF- $*$ -Algebra sind.

**Lemma A.3.3** ( $*$ -Struktur auf  $\mathcal{A} \rtimes H$ ).

Sei  $(H, \mathcal{A}, \triangleright)$  eine  $H$ -Linksmodulalgebra und sowohl  $\mathcal{A}$  als auch  $H$  sei mit einer  $*$ -Struktur versehen, und  $\triangleright$  sei eine  $*$ -Wirkung<sup>5</sup>, so wird  $\mathcal{A} \rtimes H$  zu einer  $*$ -Algebra mittels

$$(a \otimes h)^* = h_{(1)}^* \triangleright a^* \otimes h_{(2)}^*. \quad (\text{A.3.2})$$

*Beweis.* Wir rechnen nach, daß diese Definition allen Strukturen einer  $*$ -Algebra gerecht wird.

$$\begin{aligned} (a \otimes h)^{**} &= (h_{(1)}^* \triangleright a^* \otimes h_{(2)}^*)^* \\ &= h_{(2)(1)}^{**} \triangleright (h_{(1)}^* \triangleright a^*)^* \otimes h_{(2)(2)}^{**} \\ &= h_{(2)(1)} \triangleright (S(h_{(1)}^*)^* \triangleright a^{**}) \otimes h_{(2)(2)} \\ &= \underbrace{S^{-1}(h_{(1)})h_{(2)(1)}}_{\varepsilon(h_{(1)})} \triangleright a \otimes h_{(2)(2)} \\ &= a \otimes h. \end{aligned}$$

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} ((a \otimes g) \cdot (b \otimes h))^* &= (a(g_{(1)} \triangleright b) \otimes g_{(2)}h)^* \\ &= (g_{(2)(1)}h_{(1)})^* \triangleright (a(g_{(1)} \triangleright b))^* \otimes h_{(2)}^*g_{(2)(2)}^* \\ &= (g_{(2)(1)}h_{(1)})^* \triangleright (g_{(1)} \triangleright b)^* a^* \otimes h_{(2)}^*g_{(2)(2)}^* \\ &= h_{(1)}^*g_{(2)(1)}^* \triangleright (S(g_{(1)})^* \triangleright b^*)a^* \otimes h_{(2)}^*g_{(2)(2)}^* \\ &= ((h_{(1)}^*g_{(2)(1)}^*)_{(1)} \triangleright (S(g_{(1)})^* \triangleright b^*))((h_{(1)}^*g_{(2)(1)}^*)_{(2)} \triangleright a^*) \otimes h_{(2)}^*g_{(2)(2)}^* \\ &= (h_{(1)(1)}^* \underbrace{(S(g_{(1)})g_{(2)(1)(1)})^*}_{\varepsilon(g_{(1)})} \triangleright b^*)(h_{(1)(2)}^*g_{(2)(1)(2)}^* \triangleright a^*) \otimes h_{(2)}^*g_{(2)(2)}^* \\ &= (h_{(1)}^* \triangleright b^*)(h_{(2)}^* \overline{\varepsilon(g_{(1)})} g_{(2)}^* \triangleright a^*) \otimes h_{(3)}^*g_{(3)}^* \\ &= (h_{(1)}^* \triangleright b^* \otimes h_{(2)}^*) \cdot (g_{(1)}^* \triangleright a^* \otimes g_{(2)}^*) \\ &= (b \otimes h)^* \cdot (a \otimes g)^*. \end{aligned}$$

Zuletzt zeigt man noch, daß das Einselement unter der  $*$ -Involution invariant ist

$$(1_{\mathcal{A}} \otimes 1_H)^* = 1_H \triangleright 1_{\mathcal{A}} \otimes 1_H = 1_{\mathcal{A}} \otimes 1_H,$$

womit die Behauptung bewiesen wäre. □

<sup>5</sup>Manchmal bezeichnen wir eine derartige Modulalgebra auch als kurz als  $*$ -Modulalgebra. Aus dem Zusammenhang sollte klar sein was gemeint ist.

**Lemma A.3.4.**

Sei  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein  $H$ -äquivarianter  $*$ -Homomorphismus, dann ist

$$\Phi \otimes \text{id} : \mathcal{A} \rtimes H \rightarrow \mathcal{B} \rtimes H \quad (\text{A.3.3})$$

ein  $*$ -Homomorphismus, der insbesondere einen Gruppoidhomomorphismus  $\cdot \rtimes H : \text{Iso}_H^* \rightarrow \text{Iso}^*$  induziert, so daß die Identitäten  $\mathcal{A}$  in  $\text{Iso}_H^*$  auf ihre Cross-Produktalgebren  $\mathcal{A} \rtimes H$  und die Pfeile  $\Phi$  auf  $\Phi \otimes \text{id}$  abgebildet werden.

Es liegt nahe, die beiden injektiven (abgesehen von Torsionseffekten durch das Tensorprodukt  $\otimes$  über  $\mathbb{C}$ , von denen wir aber mal absehen wollen)  $*$ -Homomorphismen

$$\iota : \mathcal{A} \ni a \mapsto a \otimes 1_H \in \mathcal{A} \rtimes H, \quad (\text{A.3.4})$$

$$j : H \ni h \mapsto 1_{\mathcal{A}} \otimes h \in \mathcal{A} \rtimes H \quad (\text{A.3.5})$$

zu definieren. Sie liefern eine Einbettung der Algebren  $\mathcal{A}$  und der HOPF-Algebra  $H$  in die Cross-Produktalgebra. Offensichtlich sind die Algebren  $\mathcal{A} \otimes 1_H$  und  $1_{\mathcal{A}} \otimes H$  Unteralegebren der Cross-Produktalgebra  $\mathcal{A} \rtimes H$ . Auf der Cross-Produktalgebra  $\mathcal{A} \rtimes H$  existiert auf natürliche Weise eine  $*$ -Linkswirkung von  $H$ , die durch

$$g \triangleright (a \otimes h) = (g_{(1)} \triangleright a) \otimes g_{(2)} h S(g_{(3)}) \quad (\text{A.3.6})$$

gegeben ist. Unter Verwendung von Definition (A.3.5) kann man die Wirkung als eine „innere“ schreiben:

$$g \triangleright (a \otimes h) = j(g_{(1)})(a \otimes h)j(S(g_{(2)})). \quad (\text{A.3.7})$$

Der  $*$ -Homomorphismus  $\iota : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \rtimes H$  ist  $H$ -äquivariant, d. h. es gilt  $h \triangleright \iota(a) = \iota(h \triangleright a)$ .

Die Abbildungen (A.3.4) und (A.3.5) können wir nun die Cross-Produktalgebra als ein *universelles Objekt* interpretieren.

**Definition A.3.5** (Universelle Objekte).

Seien  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  zwei Kategorien und  $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  ein Funktor von  $\mathbf{A}$  nach  $\mathbf{B}$ , ferner sei  $B \in \text{Obj}(\mathbf{B})$ . Eine Universelle von  $B$  bezüglich des Funktors  $F$  ist das Paar  $(U, u)$ , wobei  $U \in \text{Obj}(\mathbf{A})$  ein Objekt in  $\mathbf{A}$  und  $u : B \rightarrow FU$  ein Morphismus von  $B$  nach  $FU$  ist, so daß falls  $g : B \rightarrow F\tilde{B}$  ein beliebiger Morphismus von  $B$  nach  $F\tilde{B}$  ist, ein eindeutiger Morphismus  $\tilde{g} : U \rightarrow \tilde{B}$  von  $U$  nach  $\tilde{B} \in \text{Obj}(\mathbf{B})$  existiert, und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u} & FU \\ g \downarrow & \searrow \tilde{g} & \\ & & F\tilde{B} \end{array}$$

kommutiert. Man nennt  $U$  ein universelles  $\mathbf{A}$ -Objekt für  $B$  und  $u$  den korrespondierenden universellen Morphismus.

**Proposition A.3.6** (Cross-Produktalgebra als universelles Objekt).

Sei  $\mathcal{B}$  eine  $*$ -Algebra mit Einselement mit den beiden  $*$ -Homomorphismen  $\iota_{\mathcal{B}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $j_{\mathcal{B}} : H \rightarrow \mathcal{B}$ , so daß  $\iota_{\mathcal{B}}(g \triangleright a) = j_{\mathcal{B}}(g_{(1)})\iota_{\mathcal{B}}(a)j_{\mathcal{B}}(S(g_{(2)}))$ , dann existiert ein eindeutiger  $*$ -Homomorphismus  $\phi : \mathcal{A} \rtimes H \rightarrow \mathcal{B}$ , so daß  $\iota_{\mathcal{B}} = \phi \circ \iota$  und  $j_{\mathcal{B}} = \phi \circ j$ . Dies bedeutet  $\phi(a \otimes g) = \iota_{\mathcal{B}}(a)j_{\mathcal{B}}(g)$ , und das folgende Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{A} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{A} \rtimes H & \xleftarrow{j} & H \\
 & \searrow \iota_{\mathcal{B}} & \downarrow \phi & \swarrow j_{\mathcal{B}} & \\
 & & \mathcal{B} & & 
 \end{array}$$

Ein weiteres Beispiel für ein universelles Objekt erwähnten wir schon zuvor: die universell Einhüllende einer LIE-Algebra (siehe Beispiel A.2.25).

**Definition und Konstruktion A.3.7** (Universell einhüllende Algebren).

Sei  $\mathfrak{g}$  eine LIE-Algebra über einem Körper  $\mathbb{K}$ . Wir nennen eine assoziative Algebra mit Einselement  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  über  $\mathbb{K}$  und eine Abbildung  $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  eine universell einhüllende Algebra falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- i.) Die Abbildung  $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow L(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$  ist ein LIE-Algebrahomomorphismus.
- ii.) Falls  $\mathcal{A}$  eine assoziative Algebra mit Einselement über  $\mathbb{K}$  und  $h : \mathfrak{g} \rightarrow L(\mathcal{A})$  ein Algebrahomomorphismus ist, so existiert ein LIE-Algebrahomomorphismus  $k : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{A}$  so daß  $k(1) = 1_{\mathcal{A}}$  und  $h = k\alpha$ .

**Satz A.3.8** (Existenz und Isomorphie universeller Einhüllender).

Zu jeder LIE-Algebra  $\mathfrak{g}$  existiert eine universell einhüllende Algebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . Zwei verschiedene universell einhüllende Algebren zu  $\mathfrak{g}$  sind stets isomorph.

## A.4 Verbände

Wir wollen eine kurze Einführung in die Verbandstheorie geben. Diese geht ein wenig über die von uns gebrauchten Anwendungen hinaus und basieren auf [JACOBSON 1985] und den unveröffentlichten Aufzeichnungen von BORDEMAN [1995].

**Definition A.4.1** (Verband).

Man nennt eine Menge  $V$  mit den beiden Abbildungen  $\wedge, \vee : V \times V \rightarrow V$  einen Verband, wenn die folgenden Eigenschaften für alle  $a, b, c \in V$  erfüllt sind:

- i.)  $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$  und  $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$  (Assoziativität der Verknüpfungen)
- ii.)  $a \vee b = b \vee a$  und  $a \wedge b = b \wedge a$  (Kommutativität der Verknüpfungen)
- iii.)  $a \wedge a = a \vee a = a$  (Idempotenz der Verknüpfungen)
- iv.)  $a \vee (a \wedge b) = a$  und  $a \wedge (a \vee b) = a$  (Verträglichkeit der beiden Verknüpfungen).

**Lemma A.4.2** (Halbgeordnete Menge).

Jeder Verband  $(V, \vee, \wedge)$  wird zu einer halbgeordneten Menge vermöge

$$a \leq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b \tag{A.4.1}$$

*Beweis.*

- i.)  $a \leq a \quad a \wedge a = a = a \vee a$ .
- ii.)  $a \leq b$  und  $b \leq a$  dann ist  $a \wedge b = a$  und ebenfalls  $a \wedge b = b$  woraus offensichtlich  $a = b$  folgt.  
Analog läuft die Argumentation für  $\vee$ .
- iii.) Für  $a \leq b \leq c$  gilt  $a \wedge b = a$  und  $b \wedge c = b$ . Damit kann man schreiben:  $a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$  und damit ist  $a \leq c$ . Analog zeigt man auch, daß  $a \vee c = c$  ist.

□

**Definition A.4.3** (Orthokomplementierter und orthomodularer Verband).

Ein Verband  $(V, \vee, \wedge)$  heißt orthokomplementiert, falls es eine Abbildung  $' : V \rightarrow V$  sowie zwei Elemente 0 und 1 gibt, so daß für alle  $a, b \in V$  gilt

- i.)  $0 \leq a \leq 1$ ,
- ii.)  $'$  ist injektiv,
- iii.) aus  $a \leq b$  folgt  $b' \leq a'$ ,
- iv.)  $(a')' = a$ ,
- v.)  $a \wedge a' = 0$ ,
- vi.)  $a \vee a' = 1$ .

Einen orthokomplementierten Verband  $(V, \vee, \wedge, ')$  für den zusätzlich noch die Eigenschaft  $(a \vee b') \wedge b = a$  für alle  $a \leq b$  gilt, nennt man orthomodular.

**Lemma A.4.4** (Eigenschaften orthokomplementierter Verbände).

Sei  $(V, \vee, \wedge, ')$  ein orthokomplementierter Verband, so gilt

- i.)  $' : V \rightarrow V$  ist bijektiv,
- ii.)  $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ ,
- iii.)  $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ ,
- iv.)  $a \leq (a \vee b') \wedge b$  falls  $a \leq b$ .

Die Aussagen ii.) und iii.) werden als DE MORGANSche Regeln bezeichnet.

*Beweis.*

- i.) Klar, da  $(a')' = a$ .
- ii.) Aus  $a \wedge b \geq a$  folgt  $(a \wedge b)' \leq a'$  bzw. aus  $a \wedge b \geq b$  folgt  $(a \wedge b)' \leq b$ . Und daraus folgt dann  $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ .
- iii.) Analoge Argumentation wie bei ii.).
- iv.) Wenn  $a \leq b$  ist  $a \leq a \vee b'$ .

Daraus folgt die Behauptung.

□

**Beispiel A.4.5** (Menge der abgeschlossenen \*-Ideale).

Die Menge der  $(\mathcal{D}, H)$ -abgeschlossenen \*-Ideale bilden einen Verband, den wir mit  $\mathcal{L}_{\mathcal{D}, H}$  bezeichnen.

*Beweis zu Lemma ?? und Beispiel A.4.5.* Es gilt folgendes zu zeigen

- i.) Es gelten die üblichen Verbandsregeln, d. h. Assoziativität, Kommutativität, Idempotenz und die Verträglichkeit.

Im  $H$ -äquivalenten Fall muß zusätzlich noch gezeigt werden, daß die durch die Verknüpfungen  $\wedge, \vee$  erzeugten Elemente des Verbands weiterhin  $H$ -abgeschlossen sind.

- ii.) Für beliebige  $(\mathcal{D}, H)$ -abgeschlossene \*-Ideale  $\mathcal{I}, \mathcal{J}$  ist auch  $\mathcal{I} \wedge \mathcal{J}$   $(\mathcal{D}, H)$ -abgeschlossen.

iii.) Für beliebige  $(\mathcal{D}, H)$ -abgeschlossene  $*$ -Ideale  $\mathcal{J}, \mathcal{I}$  ist auch  $\mathcal{J} \vee \mathcal{I} := \cap_i \tilde{\mathcal{J}}_i$ , das kleinste  $H$ -abgeschlossene Ideal mit  $\mathcal{J} \cup \mathcal{I} \subseteq \tilde{\mathcal{J}}$ ,  $(\mathcal{D}, H)$ -abgeschlossen.

Teil i.) ist einfach und im wesentlichen auch klar. Seien nun  $\mathcal{J} = \ker(\pi)$ ,  $\mathcal{I} = \ker(\rho)$  und  $\mathcal{K} = \ker(\kappa)$ , dann gilt

$$\begin{aligned} (\mathcal{J} \wedge \mathcal{I}) \wedge \mathcal{K} &= (\ker(\pi \oplus \rho)) \wedge \ker(\kappa) \\ &= \ker((\pi \oplus \rho) \oplus \kappa) \\ &= \ker(\pi \oplus (\rho \oplus \kappa)) \\ &= \mathcal{J} \wedge (\mathcal{I} \wedge \mathcal{K}), \end{aligned}$$

was die Assoziativität zeigt. Die Kommutativität folgt aus

$$\mathcal{J} \wedge \mathcal{I} = \ker(\pi \oplus \rho) = \ker(\rho \oplus \pi) = \mathcal{I} \wedge \mathcal{J}.$$

Komplett analog verhält es sich für  $\vee$ . Für die Idempotenz ist nun

$$\mathcal{J} \wedge \mathcal{J} = \ker(\pi \oplus \pi) = \ker(\pi) = \mathcal{J} \quad \text{und} \quad \mathcal{J} \vee \mathcal{J} = \cap_i \tilde{\mathcal{J}}_i = \mathcal{J} \cap \mathcal{J} = \mathcal{J}.$$

In einem letzten Schritt müssen wir noch zeigen, daß die beiden Verknüpfungen verträglich sind. Dazu rechnen wir nach

$$\mathcal{J} \vee (\mathcal{J} \wedge \mathcal{I}) = \mathcal{J} \vee \ker(\pi \oplus \rho) = \ker(\pi) \vee \ker(\pi \oplus \rho) = \ker(\pi) = \mathcal{J},$$

und analog natürlich  $\mathcal{J} \wedge (\mathcal{J} \vee \mathcal{I}) = \mathcal{J}$ .

Für Teil ii.) seien nun  $\mathcal{J} = \ker(\pi)$  und  $\mathcal{I} = \ker(\rho)$   $(\mathcal{D}, H)$ -abgeschlossene  $*$ -Ideale. Dann ist  $\mathcal{J} \wedge \mathcal{I} = \ker(\pi \oplus \rho)$ . Da die direkte Summe zweier  $H$ -äquivarianter Darstellungen wieder  $H$ -äquivariant ist ist  $\mathcal{J} \wedge \mathcal{I}$  auch  $H$ -äquivariant und  $(\mathcal{D}, H)$ -abgeschlossen.

In Teil iii.) sind  $\tilde{\mathcal{J}}_i$  per Definition Kern einer  $H$ -äquivarianten Darstellung und  $(\mathcal{D}, H)$ -abgeschlossen, so daß wir schreiben können  $\tilde{\mathcal{J}}_i = \ker(\tau_i)$ . Damit ist aber

$$\mathcal{J} \vee \mathcal{I} = \cap_i \tilde{\mathcal{J}}_i = \ker(\oplus_i \tau_i),$$

was natürlich wieder  $(\mathcal{D}, H)$ -abgeschlossen ist. Damit haben wir gezeigt, daß  $\mathcal{L}_{\mathcal{D}, H}(\mathcal{A})$  einen Verband bildet. □

**Beispiel A.4.6** (Orthomodularer Verband – Die Potenzmenge  $\mathcal{P}(N)$ ).

Ein Beispiel für einen orthomodularen Verband ist die Potenzmenge einer Menge  $N$ , die wir mit  $(V = \mathcal{P}(N), \cup, \cap, \setminus)$  bezeichnen. Dabei sind die Verknüpfungen die bekannten mengentheoretischen  $\cup$  und  $\cap$ , so daß  $a \vee b := a \cup b$  und  $a \wedge b := a \cap b$  für alle  $a, b \in \mathcal{P}(N)$ , desweiteren ist  $0 = \emptyset$  und  $1 = N$ .

## A.5 Projektive Moduln

Eine Einführung in die projektiven Moduln findet man in [JACOBSON 1989].

**Definition A.5.1** (Projektiver Modul).

Sei  $\mathcal{A}$  eine assoziative Algebra mit Einselement. Der  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  ist genau dann ein endlich erzeugter, projektiver  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul, falls

- i.) ein Erzeugendensystem  $(e_1, e_2, \dots, e_m)$  existiert, so daß für jedes  $x \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  Koeffizienten  $a^i \in \mathcal{A}$  mit  $i = 1, \dots, m$  existieren, so daß  $x = \sum_{i=1}^m e_i a^i$ .
- ii.) ein Projektor  $P \in M_n(\mathcal{A})$  mit  $P = P^2$  existiert, so daß  $P\mathcal{A}^n \approx \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ .

Dabei ist

$$P\mathcal{A}^n = \text{im } P = \left\{ (b_i \in \mathcal{A}^n \mid \exists c_j \in \mathcal{A}^n; \sum_j P_{ij} c_j = b_i) \right\}. \quad (\text{A.5.1})$$

Dabei sind folgende Punkte zu bemerken.

**Bemerkungen A.5.2** (Projektiver Modul).

- i.)  $(e_1, e_2, \dots, e_m)$  ist keine Basis, sondern nur ein Erzeugendensystem. Damit hat  $m$  im allgemeinen nicht die Bedeutung einer Dimension. Nur in einer Art „minimalem Fall“ könnte man  $m$  als Dimension bezeichnen.
- ii.)  $\mathcal{A}^n$  ist auf natürliche Weise ein  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul, indem man komponentenweise multipliziert. Ebenso ist  $P\mathcal{A}^n$  ein  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul, da  $(Pb_i) \cdot a = P(b_i \cdot a)$ , wobei  $a \in \mathcal{A}$  und  $b_i$  in  $\mathcal{A}^n$ .
- iii.) Die Algebra  $M_n(\mathcal{A})$  operiert mittels Matrixmultiplikation auf  $\mathcal{A}^n$ , d. h. für  $a_{ij} \in M_n(\mathcal{A})$  und  $b_k \in \mathcal{A}^n$  ist  $\mathcal{A}^n \ni c_j = \sum_j a_{ij} b_j$ .

**Lemma A.5.3.**

Die  $\mathcal{A}$ -linearen Endomorphismen von  $\mathcal{A}^n$  sind genau die  $n \times n$ -Matrizen über  $\mathcal{A}$ , d. h.  $\text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^n) = M_n(\mathcal{A})$ .

*Beweis.* Sei  $\phi \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^n)$ , dann gilt

$$\phi(x) = \phi \left( \sum_i e_i a^i \right) = \sum_i \phi(e_i) a^i = \sum_i \phi_{ij} a^i.$$

□

Eine Frage, die sich nun stellt ist, wie sieht  $\text{End}_{\mathcal{A}}(P\mathcal{A}^n)$  aus. Die Antwort gibt folgendes Lemma.

**Lemma A.5.4.**

Sei  $P\mathcal{A}^n$  ein projektiver, endlich erzeugter  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul. Die  $\mathcal{A}$ -linearen Endomorphismen von  $P\mathcal{A}^n$  können wie folgt beschrieben werden.

$$\text{End}_{\mathcal{A}}(P\mathcal{A}^n) = PM_n(\mathcal{A})P := \{ A \in M_n(\mathcal{A}) \mid \exists B \in M_n(\mathcal{A}) \text{ mit } A = PBP \} \quad (\text{A.5.2})$$

**Lemma A.5.5** (Projektive Moduln).

Folgende Aussagen sind äquivalent

- i.) Der Modul  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  ist projektiv.



ii.) Seien  $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$  und  $\tilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}$   $\mathcal{A}$ -Rechtsmoduln und  $\phi, \psi$   $\mathcal{A}$ -Rechtsmodulmorphismsen,  $\phi$  sei zudem surjektiv. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ, d. h. es existiert ein  $T$  mit  $\phi \circ T = \psi$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{\mathcal{A}} & & \\ \downarrow T & \searrow \psi & \\ \mathcal{M}_{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\phi} & \tilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}} \longrightarrow 0. \end{array}$$

iii.) Es existiert ein Modul  $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ , so daß  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{F}_{\mathcal{A}} \approx \mathcal{A}^n$ .

iv.) Es existieren  $x_i \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  und  $\mathcal{A}$ -lineare  $f^i : \mathcal{E}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$ , so daß  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \ni x = \sum_i x_i f^i(x)$  darstellbar ist für alle  $x \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ .

**Bemerkung A.5.6.**

Bedingung iii.) von Lemma A.5.5 ist die algebraische Formulierung des Satzes von SERRE-SWAN.

## A.6 Faserbündel

Wir wollen eine kurze Definition der von uns gebrauchten Strukturen im Rahmen der Bündelgeometrie geben. Einige der Definitionen entstammen [NAKAHARA 1990; KOBAYASHI & NOMIZU 1963].

### A.6.1 Grundlagen

**Definition A.6.1** (Faserbündel).

Ein (differenzierbares) Faserbündel  $(E, \pi, M, F, G)$  (oder kürzer  $E \xrightarrow{\pi} M$ ) besteht aus den folgenden Elementen:

- i.) Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit  $E$ , der Totalraum.
- ii.) Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M$ , der Basisraum (oder der Basismannigfaltigkeit).
- iii.) Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit  $F$ , der Faser (oder der typischen Faser).
- iv.) Eine Surjektion  $\pi : E \rightarrow M$ , die Projektion. Das Urbild  $\pi^{-1} \equiv F_p \cong F$  ist die Faser am Punkte  $p$ .
- v.) Eine Lie-Gruppe  $G$ , die Strukturgruppe. Sie wirkt von links auf die Faser  $F$ .
- vi.) Eine Menge offener Überdeckungen  $\{U_i\}$  von  $M$  mit einem Diffeomorphismus  $\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ , so daß  $\pi \circ \phi_i(p, f) = p$ . Man nennt die Abbildungen  $\phi_i$  eine lokale Trivialisierung.
- vii.)  $\phi_i(p, \cdot) =: \phi_{i,p} : F \rightarrow F_p$  ist ein Diffeomorphismus. Auf  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  führt man  $t_{ij} := \phi_{i,p}^{-1} \phi_{j,p} : F \rightarrow F$  ein. Dann sind  $\phi_i$  und  $\phi_j$  verknüpft über die glatte Abbildung  $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ , die Werte in der Lie-Gruppe  $G$  annimmt, und

$$\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p)f). \quad (\text{A.6.1})$$

Man nennt  $\{t_{ij}\}$  die Übergangsfunktionen.

**Bemerkung A.6.2.**

Ein Faserbündel ist unabhängig von der speziellen Wahl der Überdeckung. Daher bezeichnet man auch  $(E, \pi, M, F, G, \{U_i\}, \{\phi_i\})$  als *Koordinatenbündel*, und die Äquivalenzklasse der Koordinatenbündel als das *Faserbündel*.

**Definition A.6.3** (Äquivalenz von Faserbündeln).

Zwei Bündel  $E \xrightarrow{\pi} M$  und  $E' \xrightarrow{\pi'} M$  sind genau dann äquivalent, wenn es einen Bündeldiffeomorphismus  $\bar{f} : E \rightarrow E'$  gibt, so daß  $f : M \rightarrow M$  die Identität ist und das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\bar{f}} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{\text{id}_M} & M \end{array}$$

**Definition A.6.4** (Triviales Faserbündel).

Ein Faserbündel  $E \xrightarrow{\pi} M$  nennt man trivial, falls es sich als direktes Produkt  $E = M \times F$  aus der Basismannigfaltigkeit  $M$  und der Faser  $F$  schreiben läßt.

**Definition A.6.5** (Schnitte).

Gegeben ein Faserbündel  $E \xrightarrow{\pi} M$ . Ein Schnitt  $s : M \rightarrow E$  ist eine Abbildung von der Basis-mannigfaltigkeit in den Totalraum, so daß  $\pi \circ s = \text{id}_M$ . Die Menge aller  $k$ -fach differenzierbaren (bzw. glatten) Schnitte von  $E \xrightarrow{\pi} M$  bezeichnet man mit  $\Gamma^k(M, E)$  (bzw.  $\Gamma^\infty(M, E)$ ) oder einfacher mit  $\Gamma^k(E)$  (bzw.  $\Gamma^\infty(E)$ ).

**Beispiele A.6.6** (Vektorfelder und Einsformen auf  $M$ ).

Die einfachsten Beispiele für Schnitte sind die Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit:  $\mathfrak{X}(M) = \Gamma^\infty(M, TM)$  und die Einsformen:  $\Omega^1(M) = \Gamma^\infty(M, T^*M)$ .

**Definition A.6.7** (Vektorbündel und Geradenbündel).

Man bezeichnet ein Faserbündel  $E \xrightarrow{\pi} M$  als Vektorbündel, falls die typische Faser ein Vektorraum  $V$  ist. Ist die Faser ein eindimensionaler Vektorraum, so spricht man auch von einem Geradenbündel.

**A.6.2 Zusammenhang und Krümmung****Definition A.6.8** (Zusammenhang auf Vektorbündel  $E \xrightarrow{\pi} M$ ).

Gegeben sei ein Vektorbündel  $E \xrightarrow{\pi} M$ . Man definiert einen linearen Zusammenhang (oder eine kovariante Ableitung)

$$\nabla^E : \Gamma^\infty(TM) \times \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(E) \quad (\text{A.6.2})$$

über die folgenden Eigenschaften:

- i.)  $\nabla_{fX+gY}^E s = f\nabla_X^E s + g\nabla_Y^E s$ ,
  - ii.)  $\nabla_X^E(fs) = f\nabla_X^E s + X(f)s$ ,
- für  $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ ,  $f, g \in C^\infty(M)$  und  $s \in \Gamma^\infty(E)$ .

Der Zusammenhang kann aufgrund von Bedingung ii.) kein Tensorfeld sein. Allerdings kann man mit Hilfe des Zusammenhangs interessante Tensorfelder konstruieren.

**Definition A.6.9** (Krümmung eines Zusammenhangs  $\nabla^E$  auf  $E \xrightarrow{\pi} M$ ).

Gegeben sei ein Vektorbündel  $E \xrightarrow{\pi} M$  mit einem Zusammenhang  $\nabla^E$ . Der Krümmungstensor  $R \in \Gamma^\infty(\Lambda^2 T^*M \otimes \text{End}(E))$  des Zusammenhangs definiert man via

$$R^E(X, Y)s = \nabla_X^E \nabla_Y^E s - \nabla_Y^E \nabla_X^E s - \nabla_{[X, Y]}^E s, \quad (\text{A.6.3})$$

für  $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$  und  $s \in \Gamma^\infty(E)$ .

An dieser Stelle müßte man beispielsweise zeigen, daß die Krümmung wirklich ein Tensorfeld ist, allerdings wollen wir statt dessen auf geeignete Literatur verweisen, beispielsweise [KOBAYASHI & NOMIZU 1963, Chapter III.5].

**Lemma A.6.10** (Zusammenhang auf dem Endomorphismenbündel  $\text{End}(E) \xrightarrow{\pi'} E$ ).

Sei  $E \xrightarrow{\pi} M$  ein Vektorbündel mit einem Zusammenhang  $\nabla^E$ . Auf den Endomorphismenbündel  $\text{End}(E) \xrightarrow{\pi'} E$  wird ein Zusammenhang  $\nabla^{\text{End}(E)} : \Gamma^\infty(TM) \times \Gamma^\infty(\text{End}(E)) \rightarrow \Gamma^\infty(\text{End}(E))$  durch

$$(\nabla_X^{\text{End}(E)} A)(s) := [\nabla_X^E, A](s) \quad (\text{A.6.4})$$

für alle  $X \in \Gamma^\infty(TM)$ ,  $A \in \text{End}(E)$  und  $s \in \Gamma^\infty(E)$  induziert.

*Beweis.* Wie rechnen nach, daß  $\nabla^{\text{End}(E)}$  die Eigenschaften eines Zusammenhangs hat und funktionslinear in den Schnitten  $s \in \Gamma^\infty(E)$  ist. Die Eigenschaft *i.*) in Definition A.6.8 ist offensichtlich. Bleibt zu zeigen

$$\begin{aligned} (\nabla_X^{\text{End}(E)}(fA))(s) &= [\nabla_X^E, fA](s) \\ &= \nabla_X^E(fAs) - fA\nabla_X^E s \\ &= f\nabla_X^E(As) + AsX(f) - fA\nabla_X^E s \\ &= f(\nabla_X^E(As) - A\nabla_X^E s) + AsX(f) \\ &= f[\nabla_X^E, A](s) + AsX(f) \\ &= f(\nabla_X^{\text{End}(E)} A)(s) + X(f)A(s), \end{aligned}$$

sowie die Linearität in den Schnitten

$$\begin{aligned} (\nabla_X^{\text{End}(E)} A)(fs) &= [\nabla_X^E, A](fs) \\ &= \nabla_X^E A(fs) - A\nabla_X^E(fs) \\ &= f\nabla_X^E(As) - (As)X(f) - (Af)\nabla_X^E s + (As)X(f) \\ &= f(\nabla_X^E As - A\nabla_X^E s) \\ &= f[\nabla_X^E, A](s) \\ &= f(\nabla_X^{\text{End}(E)} A)(s). \end{aligned}$$

□

## A.7 Symplektische Geometrie

### A.7.1 Allgemeine Definitionen

In diesem Kapitel stellen wir einige Grundlagen zur *symplektischen Geometrie* zusammen. Die symplektische Geometrie ist in der Physik von großer Bedeutung, da eine große Klasse der Phasenräume von Teilchen Kotangentialbündel und damit symplektische Mannigfaltigkeiten sind. Die Klasse der Kotangentialbündel ist im allgemeinen jedoch nicht ausreichend, da durch Phasenraumreduktion durchaus symplektische Mannigfaltigkeiten entstehen können, die keine Kotangentialbündel sind. Eine Verallgemeinerung liegt daher auf der Hand. Andererseits spielen auch KÄHLER-Mannigfaltigkeiten  $(M, \omega, I, g)$  im Rahmen der Quantisierung (z. B. beim WICK-Produkt) eine zentrale Rolle. Auch diese sind symplektische Mannigfaltigkeiten mit weiteren Strukturen, siehe z. B. [WELLS 1980].

**Definition A.7.1** (Symplektische Mannigfaltigkeit  $M$ ).

Eine symplektische Mannigfaltigkeit  $(M, \omega)$  ist eine Mannigfaltigkeit mit einer punktweise nicht-ausgearteten geschlossenen Zweiform  $\omega \in \Gamma^\infty(\Lambda^2 T^*M)$ .

**Bemerkung A.7.2.**

Die Dimension einer symplektischen Mannigfaltigkeit ist immer gerade, d. h.  $\dim M = 2n$ .

**Definiton und Lemma A.7.3** (Symplektomorphismen).

Ein Diffeomorphismus  $\phi : M \rightarrow N$  zwischen zwei symplektischen Mannigfaltigkeiten  $(M, \omega)$  und  $(N, \omega')$  heißt symplektisch oder ein Symplektomorphismus, falls  $\phi^* \omega' = \omega$ . Die symplektischen Diffeomorphismen  $M \rightarrow M$  bilden eine Gruppe, die Symplektomorphismengruppe  $\text{Symp}(M)$ .

**Beispiel A.7.4.**

Ein erstes Beispiel für eine symplektische Mannigfaltigkeit ist der  $\mathbb{R}^{2n}$  mit der kanonischen symplektischen Form  $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i$ . Die symplektische Form ist offensichtlich geschlossen, d. h.  $d\omega_0 = 0$  und in einer globalen Karte für den  $\mathbb{R}^{2n}$  sogar konstant.

Das Beispiel des  $\mathbb{R}^{2n}$  ist insofern wichtig, als daß jede symplektische Mannigfaltigkeit *lokal* wie ein  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  aussieht, was die Aussage des DARBOUX-Theorems ist.

**Satz A.7.5** (DARBOUX-Theorem).

Sei  $(M, \omega)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit der Dimension  $\dim M = 2n$ , und  $p \in M$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $U \subseteq M$  von  $p$ , ein Diffeomorphismus  $\phi : U \rightarrow V$  sowie eine offene Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ , so daß

$$\phi : (U, \omega|_U) \xrightarrow{\cong} (V, \omega_0|_V) \quad (\text{A.7.1})$$

ein Symplektomorphismus ist.

**A.7.2 Symplektische Zusammenhänge**

Für die FEDOSOV-Konstruktion ist der Zusammenhang von großer Bedeutung. Daher werden wir kurz die wesentlichen (benötigten) Eigenschaften von Zusammenhängen aufführen. Im weiteren sind wir an Zusammenhängen auf  $TM$  interessiert. Dies heißt insbesondere, daß  $E = TM$  und damit wird der Zusammenhang eine Abbildung

$$\nabla : \Gamma^\infty(TM) \times \Gamma^\infty(TM) \rightarrow \Gamma^\infty(TM).$$

Diese spezielle Art von Zusammenhang erlaubt uns eine neue Größe, die *Torsion* des Zusammenhangs, zu definieren.

**Definiton und Lemma A.7.6** (Torsion eines Zusammenhangs  $\nabla$  auf  $M$ ).

Gegeben eine Mannigfaltigkeit  $M$  mit einem beliebigen Zusammenhang<sup>6</sup>  $(M, \nabla)$ . Man definiert die Torsion

$$T_\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (\text{A.7.2})$$

für alle  $X, Y, Z \in \Gamma^\infty(TM)$ .

<sup>6</sup>Wenn wir von „einer Mannigfaltigkeit  $M$  mit Zusammenhang“ sprechen, dann ist ein Zusammenhang auf dem Tangentialbündel  $TM$  gemeint.

**Lemma A.7.7** (Torsionsfreier Zusammenhang).

Auf jeder Mannigfaltigkeit mit einem Zusammenhang  $(M, \tilde{\nabla})$  existiert ein torsionsfreier Zusammenhang  $\nabla$ , d. h.  $T_{\nabla}(X, Y) = 0$  für alle  $X, Y \in \Gamma^{\infty}(TM)$ .

*Beweis.* Sei  $\tilde{\nabla}$  ein beliebiger Zusammenhang, so ist  $\nabla := \tilde{\nabla} - \frac{1}{2}T_{\tilde{\nabla}}$  torsionsfrei, da

$$\begin{aligned} T_{\nabla}(X, Y) &= \tilde{\nabla}_X Y - \frac{1}{2}T_{\tilde{\nabla}}(X, Y) - \tilde{\nabla}_Y X + \frac{1}{2}T_{\tilde{\nabla}}(Y, X) - [X, Y] \\ &= T_{\tilde{\nabla}}(X, Y) - T_{\tilde{\nabla}}(X, Y) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.7.3}$$

□

**Definition A.7.8** (Symplektischer Zusammenhang).

Gegeben eine symplektische Mannigfaltigkeit  $(M, \omega)$ . Man nennt einen Zusammenhang

$$\nabla : \Gamma^{\infty}(TM) \times \Gamma^{\infty}(TM) \rightarrow \Gamma^{\infty}(TM)$$

symplektisch falls

$$\nabla \omega = 0. \tag{A.7.4}$$

Ausgeschrieben bedeutet dies, daß

$$X(\omega(Y, Z)) = \omega(\nabla_X Y, Z) + \omega(Y, \nabla_X Z)$$

für alle  $X, Y, Z \in \Gamma^{\infty}(TM)$ .

**Lemma A.7.9** (Konstruktion symplektischer Zusammenhang).

Sei  $(M, \omega, \tilde{\nabla})$  eine symplektische Mannigfaltigkeit mit einem torsionsfreien Zusammenhang  $\tilde{\nabla}$ . Der Ausdruck

$$\omega(\nabla_X Y, Z) = \omega(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + \frac{1}{3} \left( \tilde{\nabla}_X \omega \right) (Y, Z) + \frac{1}{3} \left( \tilde{\nabla}_Y \omega \right) (X, Z) \tag{A.7.5}$$

mit  $X, Y, Z \in \Gamma^{\infty}(TM)$  definiert einen symplektischen Zusammenhang  $\nabla$ .

*Beweis.* Der Beweis ist eine elementare Rechnung, der die Torsionsfreiheit des Zusammenhangs  $\tilde{\nabla}$ , sowie die Geschlossenheit der Zweiform  $\omega$  nutzt. □

**Definition und Lemma A.7.10** (Symplektische Krümmung eines Zusammenhangs).

Sei auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit  $(M, \omega)$  ein symplektischer Zusammenhang  $\nabla$  gegeben, so ist die symplektische Krümmung  $R$  des Zusammenhangs die mit der symplektischen Form kontrahierte Krümmung  $\hat{R}$ , d. h.

$$\begin{aligned} \hat{R}(X, Y) &= \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} \in \Gamma^{\infty}(\Lambda^2 T^* M \otimes \text{End}(TM)), \\ R(Z, U, X, Y) &= \omega(Z, \hat{R}(X, Y)U) \in \Gamma^{\infty}(S^2 T^* M \otimes \Lambda^2 T^* M), \end{aligned}$$

für  $X, Y, Z, U \in \Gamma^{\infty}(TM)$ .

*Beweis.* Der Zusammenhang  $\nabla$  ist symplektisch, daher ist  $R$  in den ersten beiden Argumenten symmetrisch. Die Schiefsymmetrie in den zweiten beiden Argumenten bleibt erhalten. □

## A.8 Symmetrien – $G$ - und $\mathfrak{g}$ -Invarianz

In diesem Kapitel wollen wir einen kurzen Überblick über die Wirkung von LIE-Gruppen und LIE-Algebren auf Mannigfaltigkeiten geben.

**Definition A.8.1** ( $G$ -Mannigfaltigkeit).

Eine Mannigfaltigkeit  $M$  mit einer Gruppenwirkung  $G$  nennt man eine  $G$ -Mannigfaltigkeit, die man mit  $(M, G)$  bezeichnet. Man definiert eine Linkswirkung  $\phi$  und eine Rechtswirkung  $\psi$  durch

$$\begin{aligned}\phi : G \times M &\rightarrow M, & (g, m) &\mapsto \phi(g, m) =: \phi_g(m), \\ \psi : M \times G &\rightarrow M, & (m, g) &\mapsto \psi(m, g) =: \psi_g(m).\end{aligned}$$

so daß für alle  $g, g' \in G$  gilt:

$$\phi_{g'} \circ \phi_g = \phi_{g' \cdot g} \quad \text{sowie} \quad \phi_e = \text{id},$$

beziehungsweise für die Rechtswirkung  $\psi$

$$\psi_{g'} \circ \psi_g = \psi_{g \cdot g'} \quad \text{sowie} \quad \psi_e = \text{id}.$$

**Bemerkungen A.8.2** (Notation).

Um die Notation zu vereinfachen werden wir in Zukunft die Linkswirkung verkürzt als  $g.m$  schreiben. Die Wirkung mit  $g$ . abzukürzen hat weiter den Vorteil, daß wir kategoriell unterschiedliche Wirkungen (auf Punkte, Funktionen, Vektorfelder, Formen,...) vereinheitlicht schreiben können. Um dies machen zu können, müssen wir uns allerdings von der Konsistenz der Wirkungen überzeugen. Daher werden wir im folgenden einige Kompatibilitäten zeigen.

**Definition A.8.3** (Symplektomorphismus).

Gegeben sei eine symplektische  $G$ -Mannigfaltigkeit  $(M, \omega, G)$ . Man nennt  $\phi_g : M \rightarrow M$  einen Symplektomorphismus, falls die symplektische Form für alle  $g \in G$  invariant unter der Gruppenwirkung ist, so daß

$$\phi_{g^{-1}}^*(\omega) = \omega \quad \text{oder kurz} \quad g.\omega = \omega \quad \forall g \in G. \quad (\text{A.8.1})$$

Der nächste Schritt besteht nun darin die  $G$ -Wirkung auf ein Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit zu definieren. Diese spielen insbesondere bei der äquivarianten MORITA-Theorie eine wichtige Rolle.

**Definition A.8.4** ( $G$ -Vektorbündel).

$E \xrightarrow{\pi} M$  sei ein Vektorbündel über der  $G$ -Mannigfaltigkeit  $(M, G)$ . Man nennt  $E \xrightarrow{\pi} M$  ein  $G$ -Vektorbündel falls es eine Gruppenwirkung  $\Phi$  auf dem Vektorbündel gibt, so daß

i.) für alle  $v \in E$

$$\Phi : G \times E \rightarrow E, \quad (g, v) \mapsto \Phi(g, v) =: \Phi_g(v) = g.v, \quad (\text{A.8.2})$$

ii.) für alle  $v \in E$  und  $g \in G$  die Gleichung  $g.(\pi(v)) = \pi(g.v)$  (oder argumentfrei  $\pi \circ \Phi = \phi \circ \pi$ ) gilt. Dies ist gleichbedeutend mit der Kommutativität des folgenden Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \Phi : G \times E & \longrightarrow & E \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \phi : G \times M & \longrightarrow & M. \end{array} \quad (\text{A.8.3})$$

Man bezeichnet ein  $G$ -Vektorbündel mit  $(E \xrightarrow{\pi} M, G)$  oder kurz mit  $(E, G)$ .

**Bemerkungen A.8.5.**

- i.) Die Abbildung  $\Phi_g$  ist ein Vektorbündelautomorphismus über  $\phi_g$ .
- ii.) Die Fasern  $E_m = \pi^{-1}(m)$  sind hier komplexe Vektorräume endlicher Dimension.
- iii.) Die Abbildung  $\Phi : E_m \rightarrow E_{g.m}$  ist ein Vektorraum Homomorphismus für alle  $m \in M$  und alle  $g \in G$ .

**Lemma A.8.6** (Auf Schnitte induzierte  $G$ -Wirkung).

Die  $G$ -Wirkung auf den Schnitten  $s \in \Gamma^\infty(E)$  ist auf natürliche Weise gegeben durch

$$(g.s)(m) := \Phi_g(s(\phi_g^{-1}(m))). \quad (\text{A.8.4})$$

**Definition A.8.7** ( $G$ -invariante Schnitte).

Gegeben sei ein  $G$ -Vektorbündel  $(E, G)$ . Man nennt Schnitte  $G$ -invariant, falls  $g.s = s$  für alle  $g \in G$  gilt.

**Lemma A.8.8** (Induzierte  $G$ -Wirkung auf Funktionen).

Die Abbildung  $\phi : G \times M \rightarrow M$  induziert eine  $G$ -Linkswirkung auf den Funktionen  $C^\infty(M)$ :

$$g.f := \phi_{g^{-1}}^* f = f \circ \phi_{g^{-1}}. \quad (\text{A.8.5})$$

**Lemma A.8.9.**

Gegeben sei das  $G$ -Vektorbündel  $(E \xrightarrow{\pi} M, G)$ ,  $f \in C^\infty(M)$ ,  $s \in \Gamma^\infty(E)$  und  $g \in G$ , dann gilt:

$$g.(sf) = (g.s)(g.f) \quad (\text{A.8.6})$$

*Beweis.* Durch Einsetzen der obigen Definitionen leicht zu sehen. □

**Lemma A.8.10** (Induzierte  $G$ -Wirkung auf Einsformen und Vektorfeldern).

Die Gruppenwirkung  $\phi$  induziert auch eine  $G$ -Linkswirkung auf den Schnitten im Kotangentenbündel  $\Gamma^\infty(T^*M) \ni \alpha$ , den 1-Formen

$$\begin{aligned} (g.\alpha)(m) &:= (\phi_{g^{-1}}^* \alpha)(m) \\ &= \alpha(\phi_{g^{-1}}(m)) \circ T_m \phi_{g^{-1}} \\ &= \alpha(\phi_{g^{-1}}(m)) \circ (T_{\phi_{g^{-1}}(m)} \phi_g)^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.8.7})$$

sowie auf den Schnitten im Tangentialbündel  $\Gamma^\infty(TM) \ni X$ , den Vektorfeldern

$$(g.X)(m) := (\phi_{g*} X)(m) = T_{\phi_{g^{-1}}(m)} \phi_g X(\phi_{g^{-1}}(m)). \quad (\text{A.8.8})$$

Ferner ist die Gruppenwirkung  $\phi$  verträglich mit der Kontraktion. Das heißt es gilt:  $(g.\alpha)(g.X) = g.(\alpha(X))$ .

**Definition A.8.11** (Wirkung auf Endomorphismenbündel).

Sei  $A \in \Gamma^\infty(\text{End}(E))$  und  $s \in \Gamma^\infty(E)$  so definiert man eine Gruppenwirkung auf  $\Gamma^\infty(\text{End}(E))$  mittels

$$(g.A)(s) := g.(A(g^{-1}s)). \quad (\text{A.8.9})$$



Die so definierte  $G$ -Wirkung ist verträglich mit der natürlichen Multiplikation von  $A$  und  $s$ :

$$g.(As) = (g.A)(g.s). \quad (\text{A.8.10})$$

Wir rechnen mit  $A \in \Gamma^\infty(\text{End}(E))$  und  $s \in \Gamma^\infty(E)$  nach:

$$\begin{aligned} g.(As)(m) &= \Phi_g(As)\phi_{g^{-1}}(m) \\ &= \Phi_g|_{E_{\phi_{g^{-1}}(m)}} A(\phi_{g^{-1}}s)(m) \\ &= \underbrace{\Phi_g|_{E_{\phi_{g^{-1}}(m)}} A(\Phi_g|_{E_{\phi_{g^{-1}}(m)}})^{-1}}_{(g.A)(m)} \underbrace{\Phi_g|_{E_{\phi_{g^{-1}}(m)}} s(\phi_{g^{-1}}(m))}_{(g.s)(m)} \\ &\Rightarrow g.(A.s) = (g.A)(g.s). \end{aligned}$$

**Definition A.8.12** ( $G$ - und  $\mathfrak{g}$ -invarianter Zusammenhang  $\nabla$ ).

Sei  $(M, \omega)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit mit einem linearen Zusammenhang nach Definition A.7.8,  $G$  eine LIE-Gruppe und  $\mathfrak{g}$  eine LIE-Algebra, die nicht notwendigerweise von einer Gruppe  $G$  kommt. Man nennt den Zusammenhang  $\nabla$  für alle  $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$

i.)  $G$ -invariant, falls für alle  $g \in G$  gilt:

$$\phi_g^* \nabla_X Y = \nabla_{\phi_g^* X} \phi_g^* Y. \quad (\text{A.8.11})$$

ii.)  $\mathfrak{g}$ -invariant, falls für alle  $\xi \in \mathfrak{g}$  gilt:

$$\mathcal{L}_\xi(\nabla_X Y) = \nabla_{\mathcal{L}_\xi X} Y + \nabla_X \mathcal{L}_\xi Y. \quad (\text{A.8.12})$$

Eine wichtige Frage ist nun, wie man einen  $G$ -invarianten Zusammenhang auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  erhält. Für kompakte Gruppen kann man sich einen solchen konstruieren, indem man den Zusammenhang über die Gruppe mittelt.

**Lemma A.8.13** (Mittelung eines Zusammenhangs  $\nabla$ ).

Gegeben sei eine kompakte LIE-Gruppe  $G$ , die auf der Mannigfaltigkeit  $(M, \nabla)$  durch Linksaktion agiere. Man erhält wie folgt einen  $G$ -invarianten Zusammenhang  $\overline{\nabla}$ :

$$\overline{\nabla}_X Y = \frac{1}{\text{Vol } G} \int_G g^{-1} \cdot (\nabla_{g \cdot X} g \cdot Y) \mu(g) \quad (\text{A.8.13})$$

Dabei ist  $\mu$  das HAAR-Maß, und  $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ .

*Beweis.* Um Lemma A.8.13 zu beweisen muß man zum einen zeigen, daß es sich bei  $\overline{\nabla}$  um einen Zusammenhang auf  $TM$  handelt und zum anderen, daß dieser invariant ist.

i.) Im ersten Schritt zeigen wir die  $C^\infty(M)$ -Linearität im ersten Argument, es gilt also  $\overline{\nabla}_{fX} Y = f \overline{\nabla}_X Y$  für alle  $f \in C^\infty(M)$  und  $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ .

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{fX} Y &= \frac{1}{\text{Vol } G} \int_G g^{-1} \cdot (\nabla_{g \cdot (fX)} g \cdot Y) \mu(g) \\ &= \frac{1}{\text{Vol } G} \int_G g^{-1} \cdot (\nabla_{(g \cdot f)(g \cdot X)} g \cdot Y) \mu(g) \\ &= \frac{1}{\text{Vol } G} \int_G g^{-1} \cdot (g \cdot f) g^{-1} \cdot (\nabla_{g \cdot X} g \cdot Y) \mu(g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f \frac{1}{\text{Vol } G} \int_G g^{-1} \cdot (\nabla_{g.X} g.Y) \mu(g) \\
&= f \bar{\nabla}_{h.X} h.Y
\end{aligned}$$

ii.) Im zweiten Argument ist der Zusammenhang derivativ,  $\bar{\nabla}_X(fY) = f\bar{\nabla}_X Y + X(f)Y$  für alle  $f \in C^\infty(M)$  wie eine kurze Rechnung zeigt.

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X(fY) &= \frac{1}{\text{Vol } G} \int_G g^{-1} \cdot (\nabla_{g.X} g.(fY)) \mu(g) \\
&= \frac{1}{\text{Vol } G} \int_G g^{-1} \cdot (\nabla_{g.X} ((g.f)(g.Y))) \mu(g) \\
&= \frac{1}{\text{Vol } G} \int_G g^{-1} \cdot (f(\nabla_{g.X} g.Y) + ((g.X)(g.f))Y) \mu(g) \\
&= \frac{1}{\text{Vol } G} \left( \int_G f g^{-1} \cdot \nabla_{g.X} g.Y \mu(g) + \int_G g^{-1} ((g.X)(g.f)g.Y) \mu(g) \right) \\
&= f \bar{\nabla}_X Y + X(f)Y.
\end{aligned}$$

iii.) Der Zusammenhang ist  $G$ -invariant, d. h.  $h.\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_{h.X} h.Y$  für alle  $h \in G$ .

$$\begin{aligned}
h.\bar{\nabla}_X Y &= h. \frac{1}{\text{Vol } G} \int_G g^{-1} \cdot (\nabla_{g.X} g.Y) \mu(g) \\
&= \frac{1}{\text{Vol } G} \int_G \underbrace{h.g^{-1}}_{=\tilde{g}^{-1}} \cdot (\nabla_{g.X} g.Y) \underbrace{\mu(g)}_{=\mu(\tilde{g})} \\
&= \frac{1}{\text{Vol } G} \int_G \tilde{g}^{-1} \cdot (\nabla_{\tilde{g}.h.X} \tilde{g}.h.Y) \mu(\tilde{g}) \\
&= \bar{\nabla}_{h.X} h.Y.
\end{aligned}$$

□

**Lemma A.8.14** ( $G$ -invarianter, symplektischer Zusammenhang).

Wählt man einen beliebigen, torsionsfreien,  $G$ -invarianten Zusammenhang  $\tilde{\nabla}$  auf der symplektischen  $G$ -Mannigfaltigkeit  $(M, \omega, G)$ , und ist die  $G$ -Wirkung  $g$  ein Symplektomorphismus, so erhält man mit der Konstruktion eines symplektischen Zusammenhangs aus Lemma A.7.9, einen symplektischen und  $G$ -invarianten Zusammenhang  $\nabla$ .

*Beweis.* Wir betrachten dazu folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned}
\omega(\nabla_{g.X} g.Y, g.Z) &= \omega(\tilde{\nabla}_{g.X} g.Y, g.Z) + \frac{1}{3}(\tilde{\nabla}_{g.X} \omega)(g.Y, g.Z) + \frac{1}{3}(\tilde{\nabla}_{g.Y} \omega)(g.X, g.Z) \\
&= \omega(g.\tilde{\nabla}_X Y, g.Z) + \frac{1}{3}(\tilde{\nabla}_{g.X} g.\omega)(Y, Z) + \frac{1}{3}(\tilde{\nabla}_{g.Y} g.\omega)(X, Z) \\
&= g.\omega(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + \frac{1}{3}g.(\tilde{\nabla}_X \omega)(Y, Z) + \frac{1}{3}g.(\tilde{\nabla}_Y \omega)(X, Z) \\
&= g.(\omega(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + \frac{1}{3}(\tilde{\nabla}_X \omega)(Y, Z) + \frac{1}{3}(\tilde{\nabla}_Y \omega)(X, Z)) \\
&= g.\omega(\nabla_X Y, Z) \\
&= \omega(g.(\nabla_X Y), g.Z)
\end{aligned} \tag{A.8.14}$$

$$\Rightarrow g.(\nabla_X Y) = \nabla_{g.X} g.Y.$$

□

**Lemma A.8.15** (*G*-invarianter Zusammenhang auf Endomorphismenbündel).

Sei  $E \xrightarrow{\pi} M$  ein Bündel mit einem *G*-invarianten Zusammenhang  $\nabla^E$  über der Mannigfaltigkeit  $M$ . Der auf dem Endomorphismenbündel  $\text{End}(E) \xrightarrow{\pi'} E$  induzierte Zusammenhang  $\nabla^{\text{End}(E)}$  ist auch *G*-invariant.

*Beweis.* Der Beweis ist eine einfache Rechnung.

$$\begin{aligned}
 g.(\nabla_X^{\text{End}(E)} A)(s) &= g.([\nabla_X^E, A])(s) \\
 &= g.([\nabla_X^E, A](g^{-1}.s)) \\
 &= g.(\nabla_X^E(A(g^{-1}.s)) - A\nabla_X^E(g^{-1}.s)) \\
 &= g.\nabla_X^E(A(g^{-1}.s)) - g.(A\nabla_X^E(g^{-1}.s)) \\
 &= \nabla_{g.X}^E(g.(A(g^{-1}.s))) - (g.A)g.(\nabla_X^E(g^{-1}.s)) \\
 &= \nabla_{g.X}^E((g.A)(s)) - (g.A)\nabla_{g.X}^E(s) \\
 &= [\nabla_{g.X}^E, g.A](s) \\
 &= (\nabla_{g.X}^{\text{End}(E)}(g.A))(s).
 \end{aligned}$$

□

## A.9 POISSON-Geometrie

Sich an dieser Stelle ausführlich mit der POISSON-Geometrie auseinander zu setzen würden den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Daher wollen wir uns kurz fassen und nur ein paar grundlegende Definitionen angeben, und den interessierten Leser auf die folgenden Bücher aufmerksam machen. Geeignete Literatur zur POISSON-Geometrie sind [VAISMAN 1994], [MARSDEN & RATIU 2000], [CANNAS DA SILVA & WEINSTEIN 1999] sowie [WALDMANN 2004a].

**Definition A.9.1** (POISSON-Klammer und POISSON-Mannigfaltigkeit).

Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Man nennt eine bilineare Abbildung

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

eine POISSON-Klammer falls sie die folgenden Eigenschaften hat:

- i.)  $\{f, g\} = -\{g, f\}$  (Schiefsymmetrie),
- ii.)  $\{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g\} = \alpha_1 \{f_1, g\} + \alpha_2 \{f_2, g\}$  (Bilinearität)
- iii.)  $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, g\}h$  (LEIBNIZ-Regel),
- iv.)  $\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}$  (JACOBI-Identität),

mit  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ . Man nennt  $(M, \{\cdot, \cdot\})$  eine POISSON-Mannigfaltigkeit.

**Bemerkungen A.9.2.**

- i.) Die LEIBNIZ-Regel von  $\{\cdot, \cdot\}$  ist äquivalent dazu, daß es ein Bivektorfeld  $\Lambda \in \Gamma^\infty(\Lambda^2 TM)$  gibt, so daß

$$\{f, g\} = \Lambda(df \otimes dg). \tag{A.9.1}$$

Man nennt  $\Lambda$  den POISSON-Bivektor. In lokalen Koordinaten  $(U, u)$  schreibt man das Bivektorfeld als

$$\Lambda|_U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Lambda^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j}. \quad (\text{A.9.2})$$

Die POISSON-Klammer wird in einer Karte  $(U, u)$  dann zu

$$\{f, g\}|_U = \sum_{i,j} \Lambda^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j}. \quad (\text{A.9.3})$$

ii.) Die JACOBI-Identität kann man dann in einer den lokalen Koordinaten  $(U, u)$  schreiben als

$$\sum_{i,j,s,r} (\Lambda_{,r}^{ij} \Lambda^{rs} + \Lambda_{,r}^{js} \Lambda^{ri} + \Lambda_{,r}^{si} \Lambda^{rj}) \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j} \frac{\partial h}{\partial u^s} = 0. \quad (\text{A.9.4})$$

# Symbolverzeichnis

## Allgemeines

$\hbar$	PLANCKsches Wirkungsquantum ( $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0546 \times 10^{-34}$ Js)
$i$	Imaginäre Einheit $i^2 = -1$
$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen
$\mathbb{Z}$	Ring der ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}_p$	Restklassenring $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$	Körper der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen
$\mathbb{K}$	Körper: $\mathbb{Q}$ , $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
$\mathbb{K}[[\lambda]]$	Ring der formalen Potenzreihen in $\lambda$ mit Werten in $\mathbb{K}$
$\mathbb{T}^n$	$n$ -dimensionaler Torus $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$
$S^n$	$n$ -dimensionale Sphäre
$M_n(\cdot)$	Ring der $n \times n$ -Matrizen
$O(n)$ , $SO(n)$	Orthogonale Gruppe, Spezielle Orthogonale Gruppe in $n$ Dimensionen
$U(n)$ , $SU(n)$	Unitäre Gruppe, Spezielle Unitäre Gruppe in $n$ Dimensionen
$R$ , $S$	(geordnete) Ringe
$C$	komplexe Erweiterung des geordneten Rings $R$ , $C = R(i)$

## Kapitel 1

$\mathcal{H}$	Prä-HILBERT-Raum
$\mathfrak{H}$	HILBERT-Raum
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt auf (Prä-)HILBERT-Raum
$\psi, \phi, \chi$	Vektoren in einem (Prä-)HILBERT-Raum
$\mathcal{H}^\perp$	Ausartungsraum von $\langle \cdot, \cdot \rangle$
$[\psi], [\phi]$	Vektoren im Quotientenraum $\mathcal{H}/\mathcal{H}^\perp$ (Äquivalenzklasse)

$A, B, C$	(Adjungierbare) Operatoren
$\mathcal{B}(\mathcal{H})$	Raum der Operatoren auf $\mathcal{H}$ , deren Adjungiertes existiert
$\text{PräHilbert}(\mathbb{C})$	Kategorie der Prä-HILBERT-Räume über $\mathbb{C}$
$\Theta_{\phi, \psi}$	Operator vom Rang Eins
$\mathcal{F}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$	Raum der Operatoren mit endlichem Rang
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$	*-Algebren
$\ast\text{alg}(\mathbb{C})$	Kategorie der *-Algebren über $\mathbb{C}$
$\ast\text{Alg}(\mathbb{C})$	Kategorie der *-Algebren mit Einselement über $\mathbb{C}$
$L^2(\cdot)$	Raum der quadratintegrablen Funktionen
$1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$	Einselement der Algebra $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}^+$	Menge der positiven Elemente in $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}^{++}$	Menge der quadratischen Elemente in $\mathcal{A}$
$\omega$	Positives Funktional
$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}, {}_{\mathcal{A}}\mathcal{H}$	$\mathcal{D}$ -Rechtsmodul, $\mathcal{A}$ -Linksmodul
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$	$\mathcal{D}$ -wertiges inneres Produkt auf $\mathcal{D}$ -Rechtsmodul
${}_{\mathcal{A}}\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\mathcal{A}$ -wertiges inneres Produkt auf $\mathcal{A}$ -Linksmodul
$(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}})$	Innerer Produktmodul
$(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}/\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\perp}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}})$	Prä-HILBERT-Modul
$\text{C-span}\{\cdot\}$	$\mathbb{C}$ -lineare Hülle
$h$	HERMITESche Fasermetric
$h_x$	HERMITESche Fasermetric am Punkt $x$ ausgewertet
$(\mathcal{H}, \pi)$	*-Darstellung
$T$	Verschrankungsoperator zwischen *-Darstellungen
$\ast\text{-mod}_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$	Kategorie der *-Darstellungen der *-Algebra $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{D}$ -Rechtsmodul
$\ast\text{-rep}_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$	Kategorie der *-Darstellungen der *-Algebra $\mathcal{A}$ auf Prä-HILBERT- $\mathcal{D}$ -Rechtsmoduln
$\ast\text{-Mod}_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$	Kategorie der stark nichtentarteten *-Darstellungen der *-Algebra $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{D}$ -Rechtsmodul
$\ast\text{-Rep}_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$	Kategorie der stark nichtentarteten *-Darstellungen der *-Algebra $\mathcal{A}$ auf Prä-HILBERT- $\mathcal{D}$ -Rechtsmoduln
$\text{mod-}R$	Kategorie der $R$ -Rechtsmoduln
$R\text{-mod}$	Kategorie der $R$ -Linksmoduln
$\text{Mod-}R$	Kategorie der $R$ -Rechtsmoduln mit $\mathcal{E}_R \cdot R = \mathcal{E}_R$
$R\text{-Mod}$	Kategorie der $R$ -Linksmoduln mit $R \cdot {}_R\mathcal{E} = {}_R\mathcal{E}$
${}_B\mathcal{E}_A, {}_B\mathcal{F}_A$	$\mathcal{B}$ -Links- $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul, d. h. $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ -Bimodul
${}_R\mathcal{E}^{\ast}_S$	dualer Bimodul zu ${}_S\mathcal{E}_R$
${}_A\overline{\mathcal{E}}_B$	komplex-konjugierter Bimodul zu ${}_B\mathcal{E}_A$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}}$	$\mathcal{A}$ -wertiges inneres Produkt auf ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$
$({}_{\mathcal{B}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, {}_{\mathcal{B}}\langle \cdot, \cdot \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}})$	$(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ -Bimodul mit $\mathcal{B}$ -wertigem und $\mathcal{A}$ -wertigem inneren Produkt
$\otimes_{\mathcal{B}}$	Inneres Tensorprodukt über der Algebra $\mathcal{B}$
$\widehat{\otimes}_{\mathcal{B}}$	Inneres Tensorprodukt über der Algebra $\mathcal{B}$ (berücksichtigt inneres Produkt)
$\widetilde{\otimes}_{\mathcal{B}}$	Inneres Tensorprodukt über der Algebra $\mathcal{B}$ (berücksichtigt beide inneren Produkte)
$R_{\mathcal{E}}$	RIEFFEL-Induktion
$S_{\mathcal{E}}$	Wechsel der Basisalgebra
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, F$	Kategorien $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ und Funktor $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ ,
$\text{Id}_{\mathbf{A}}$	Identitätsfunktor auf der Kategorie $\mathbf{A}$
$\text{Obj}(\mathbf{A})$	Objekte der Kategorie $\mathbf{A}$
$\text{Morph}(\mathbf{A})$	Morphismen der Kategorie $\mathbf{A}$
$J(R)$	JACOBSON-Radikal des Rings $R$
$\mathfrak{Z}(R)$	Zentrum des Rings $R$
$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$	$\mathcal{A}$ -lineare Homomorphismen von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$
$\text{End}_R(\mathcal{E}_R)$	$R$ -lineare Endomorphismen von $\mathcal{E}_R$
$P$	idempotentes Element oder Projektor
$PR^n$	$n$ -komponentiger projektiver Modul
$H$	HOPF-Algebra (siehe auch Anhang A)
$(H, \triangleright)$	HOPF-Algebra $H$ mit Wirkung $\triangleright$
$(H, \mathcal{A}, \triangleright)$	$H$ -Modulalgebra
$\overline{\triangleright}$	Wirkung auf dualem Bimodul ${}_{\mathcal{A}}\overline{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$
$*\text{-mod}_{\mathcal{D}, H}(\mathcal{A})$	Kategorie der $H$ -äquivalenten $*$ -Darstellungen der $*$ -Algebra $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{D}$ -Rechtsmodul
$*\text{-rep}_{\mathcal{D}, H}(\mathcal{A})$	Kategorie der $H$ -äquivalenten $*$ -Darstellungen der $*$ -Algebra $\mathcal{A}$ auf Prä-HILBERT- $\mathcal{D}$ -Rechtsmodul
$*\text{-Mod}_{\mathcal{D}, H}(\mathcal{A})$	Kategorie der stark nichtentarteten $H$ -äquivalenten $*$ -Darstellungen der $*$ -Algebra $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{D}$ -Rechtsmodul
$*\text{-Rep}_{\mathcal{D}, H}(\mathcal{A})$	Kategorie der stark nichtentarteten $H$ -äquivalenten $*$ -Darstellungen der $*$ -Algebra $\mathcal{A}$ auf Prä-HILBERT- $\mathcal{D}$ -Rechtsmoduln

## Kapitel ??

<u>Pic</u>	PICARD-Bikategorie
$\text{Pic}, \text{Pic}^*, \text{Pic}^{\text{str}}$	PICARD-Gruppoid, $*$ -PICARD-Gruppoid, starkes PICARD-Gruppoid
$\text{Pic}(\mathcal{A})$	PICARD-Gruppe von $\mathcal{A}$
$\text{SPic}(\mathcal{A})$	Statische (klassische, kommutative) PICARD-Gruppe von $\mathcal{A}$

$\text{Iso}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$	Isomorphismen von $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$
$\text{Iso}^*(\mathcal{A}, \mathcal{B})$	*-Isomorphismen von $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$
$\text{Aut}(\mathcal{A})$	Automorphismengruppe von $\mathcal{A}$
$\text{Aut}^*(\mathcal{A})$	*-Automorphismen von $\mathcal{A}$
$\text{InnAut}(\mathcal{A})$	Gruppe der inneren Automorphismen der Algebra $\mathcal{A}$
$\text{InnAut}^*(\mathcal{A})$	Gruppe der inneren *-Automorphismen der Algebra $\mathcal{A}$
$\text{OutAut}(\mathcal{A})$	äußere Automorphismen der Algebra $\mathcal{A}$
$\text{OutAut}^*(\mathcal{A})$	äußere *-Automorphismen der Algebra $\mathcal{A}$
$\cdot_\phi, \cdot_\psi$	durch Automorphismus $\phi$ bzw. $\psi$ getwistete Modulstruktur
$\text{Diff}(M)$	Diffeomorphismengruppe von $M$
$\check{H}^n(M, \mathbb{Z})$	$n$ -te integrale Čech-Kohomologie
$\text{Aut}_H, \text{Pic}_H,$	$H$ -äquivariante Automorphismen, $H$ -äquivariantes PICARD-Gruppoid
$G, \mathfrak{g}$	LIE-Gruppe $G$ , LIE-Algebra $\mathfrak{g}$
$\mathcal{L}_\xi$	LIE-Ableitung
$X_\xi$	linksinvariantes Vektorfeld zu $G$
$e_1, \dots, e_n$	Basis von $\mathfrak{g}$
$X_{e_1}, \dots, X_{e_n}$	Modulbasis aller Vektorfelder $\Gamma^\infty(TG)$ von $G$
$\nabla$	linearer Zusammenhang
$h \mapsto u_h$	C-linearer Endomorphismus von ${}_B\mathcal{E}_A$
$\mathbf{a}, \mathbf{b}$	C-linearer Homomorphismus von HOPF-Algebra $H$ in *-Algebra
$\triangleright^{\mathbf{b}}$	mit $\mathbf{b}$ von links getwistet Wirkung $\triangleright$ auf Bimodul
$\triangleright_{\mathbf{a}}$	mit $\mathbf{a}$ von rechts getwistet Wirkung $\triangleright$ auf Bimodul
$\text{GL}(H, \mathcal{A})$	Gruppe von Elementen aus $\text{Hom}_C(H, \mathcal{A})$ bezüglich Konvolutionsprodukt $*$
$\text{U}(H, \mathcal{A})$	Unitäre Elemente in $\text{GL}(H, \mathcal{A})$
$\text{GL}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))$	ABELsche Gruppe der invertierbaren, zentralen Elemente der Algebra $\mathcal{A}$
$\text{U}(\mathfrak{Z}(\mathcal{A}))$	ABELsche Gruppe der unitären, zentralen Elemente der *-Algebra $\mathcal{A}$
$\text{GL}_0(H, \mathcal{A}), \text{U}_0(H, \mathcal{A})$	Quotientengruppen
$Z_{\text{CE}}^n(\mathfrak{g}, \mathcal{A})$	$n$ -Kozykeln der CHEVALLEY-EILENBERG Kohomologie mit Werten in $\mathcal{A}$
$J$	Impulsabbildung
$({}_B\mathcal{E}_A, \triangleright)$	Bimodul mit Wirkung
$\text{Bij}(M)$	Gruppe der Bijektionen auf $M$
$\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$	*-Ideale
$\mathcal{J}^{\text{cl}}$	kleinstes abgeschlossenes Ideal, das $\mathcal{J}$ enthält
$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$	Verband der $\mathcal{D}$ -abgeschlossenen Ideale
$\mathcal{L}_{\mathcal{D}, H}$	Verband der $(\mathcal{D}, H)$ -abgeschlossenen Ideale
$\mathfrak{Z}_H(\mathcal{A})$	$H$ -invariantes Zentrum der Algebra $\mathcal{A}$
$\text{Proj}(\mathcal{A})$	Kategorie der endlich erzeugten, projektiven $\mathcal{A}$ -Rechtsmoduln



$\underline{\text{Proj}}^*(\mathcal{A})$	Kategorie der endlich erzeugten, projektiven Prä-HILBERT- $\mathcal{A}$ -Rechtsmoduln
$\underline{\text{Proj}}^{\text{str}}(\mathcal{A})$	Kategorie der endlich erzeugten, projektiven starken Prä-HILBERT- $\mathcal{A}$ -Rechtsmoduln
$\underline{\text{Proj}}_H(\mathcal{A})$	Kategorie der $H$ -äquivalenten endlich erzeugten, projektiven $\mathcal{A}$ -Rechtsmoduln
$\underline{\text{Proj}}_H^*(\mathcal{A})$	Kategorie der $H$ -äquivalenten, endlich erzeugten, projektiven Prä-HILBERT- $\mathcal{A}$ -Rechtsmoduln
$\underline{\text{Proj}}_H^{\text{str}}(\mathcal{A})$	Kategorie der $H$ -äquivalenten, endlich erzeugten, projektiven starken Prä-HILBERT- $\mathcal{A}$ -Rechtsmoduln
$\{x_i, y_i\}_{i=1, \dots, n}$	HERMITESche duale Basis eines endlich erzeugten, projektiven Rechtsmoduls
$\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}}, \underline{\mathbf{C}}, \underline{F}$	Bikategorien $\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}}, \underline{\mathbf{C}}$ und Bifunktor $\underline{F} : \underline{\mathbf{A}} \rightarrow \underline{\mathbf{B}}$
$2\text{-Morph}(\underline{\mathbf{C}})$	2-Morphismen der Bikategorie $\underline{\mathbf{C}}$

## Kapitel 2

$\mathcal{A} \rtimes H, \mathcal{B} \rtimes H$	Cross-Produktalgebren
$I_1, I_2, I_3$	(kanonische) Isomorphismen
$\chi$	Charakter

## Kapitel 3

$M, N, Q$	$C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten (HAUSDORFFsch, zweites Abzählbarkeitsaxiom)
$C^\infty(M)$	glatte komplexwertige Funktionen auf $M$
$C_0^\infty(M)$	glatte komplexwertige Funktionen mit kompaktem Träger auf $M$
$f, g$	Funktionen auf Mannigfaltigkeit
$f \mapsto \bar{f}$	punktweise komplexe Konjugation
$\text{supp } f$	Träger von $f$
$\mu$	BOREL-Maß
$C^\omega(\mathbb{C}^n)$	reell-analytische Funktionen auf dem $\mathbb{C}^n$
$(M, \omega)$	symplektische Mannigfaltigkeit
$(M, \omega, I, g)$	KÄHLER-Mannigfaltigkeit mit komplexer Struktur $I^2 = -\text{id}$ und Metrik $g$
$(M, \Lambda)$	POISSON-Mannigfaltigkeit
$\{\cdot, \cdot\}$	POISSON-Klammer
$TQ$	Tangentialbündel der Mannigfaltigkeit $Q$
$T^*Q$	Kotangentialbündel der Mannigfaltigkeit $Q$
$\omega_0$	kanonische symplektische Form auf Kotangentialbündeln

$(T^*Q, \omega_0)$	Kotangentialbündel mit kanonischer symplektischer Zweiform $\omega_0 = -d\theta_0$
$q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$	lokale Bündelkoordinaten auf $T^*Q$
$H$	HAMILTON-Funktion
$(M, G)$	$G$ -Mannigfaltigkeit
$(M, \omega, G)$	symplektische $G$ -Mannigfaltigkeit
$\mathfrak{D}, \mathfrak{H}$	HILBERT-Räume
$\mathbb{P}\mathfrak{H}$	projektiver HILBERT-Raum
$\psi, \psi'$	Vektoren in HILBERT-Raum
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	inneres $\mathbb{C}$ -wertiges Produkt
$P, Q$	Impulsoperator, Ortsoperator
$P_j, Q^i$	$j$ -te Komponente des Impulsoperators, $i$ -te Komponente des Ortsoperators
$\text{id}_{\mathfrak{H}}$	Identität auf HILBERT-Raum $\mathfrak{H}$
$A \mapsto A^*$	Adjungieren des Operators $A$
$\delta_{ij}$	KRONECKER-Delta
$[\cdot, \cdot]$	Kommutator (von Operatoren)
$\text{DiffOp}(\mathbb{R}^n)$	Differentialoperatoren mit glatten Koeffizientenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$
$\text{DiffOpPol}(\mathbb{R}^n)$	Differentialoperatoren mit polynomialen Koeffizientenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$
$\text{Pol}(\mathbb{R}^{2n}), \text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n)$	Polynome auf dem $\mathbb{R}^{2n}$ oder $T^*\mathbb{R}^n$
$z^1 \dots z^n, \bar{z}^1 \dots \bar{z}^n$	(globale) Koordinatenfunktionen auf dem $\mathbb{C}^n$
$d\mu$	GAUSS-Maß
$L^2(\mathbb{C}^n, d\mu)$	Raum der quadratintegriblen Funktionen auf dem $\mathbb{C}^n$
$\varrho_{\text{Weyl}}, \varrho_{\text{Std}}, \varrho_{\kappa}$	WEYL-, Standard-, $\kappa$ -geordnete Darstellung
$\varrho_{\text{Wick}}, \varrho_{\tilde{\kappa}}$	WICK-, $\tilde{\kappa}$ -geordnete Darstellung
$\sigma_{\text{Weyl}}, \sigma_{\text{Std}}, \sigma_{\kappa}$	WEYL-, Standard-, $\kappa$ -Symbolabbildungen
$\sigma_{\text{Wick}}, \sigma_{\tilde{\kappa}}$	WICK-, $\tilde{\kappa}$ -Symbolabbildungen
$\star$	Sternprodukt
$\star_{\text{Weyl}}, \star_{\text{Std}}, \star_{\kappa}$	WEYL-, Standard-, $\kappa$ -geordnete Sternprodukte
$\star_{\text{Wick}}, \star_{\tilde{\kappa}}$	WICK-, $\tilde{\kappa}$ -geordnete Sternprodukte
$[\cdot, \cdot]_{\star}$	Kommutator bezüglich des Sternprodukts $\star$
$\mathcal{O}(\lambda^n)$	Terme von $\lambda$ mit mindestens der Potenz $n$
$N_{\kappa}, S_{\tilde{\kappa}}$	$\kappa$ -ordnender NEUMAIER-Operator, Analogon für $\tilde{\kappa}$ -Ordnung
$\Delta, \tilde{\Delta}$	LAPLACE-Operator
$P, P^*, Q, Q^*$	differentielle Abbildungen auf $\text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n) \otimes \text{Pol}(T^*\mathbb{R}^n)$
$D$	allgemeiner Differentialoperator
$\mu$	Multiplikationsabbildung $\mu(a \otimes b) = ab$
$\tau$	Vertauschungsoperator, Flip $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$
$C$	komplexe Konjugation $C(a) = \bar{a}$

$Z, \overline{Z}$	differentielle Abbildungen auf $\text{Pol}(\mathbb{C}^n) \otimes \text{Pol}(\mathbb{C}^n)$
$B_n$	Bidifferentialoperator der Stufe $n$
$\mathcal{A}$	Algebra $\mathcal{A}$ über dem Ring $\mathbb{C}$
$\mathcal{A}[[\lambda]]$	formale Potenzreihe in $\lambda$ mit Koeffizienten aus $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}$	deformierte Algebra $\mathcal{A} = (\mathcal{A}[[\lambda]], \star)$ bezüglich $\star$
$1_{\mathcal{A}}$	Einselement der Algebren $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}$
$C_n$	$\mathbb{C}$ -bilineare Abbildung auf Algebra $\mathcal{A}$
$T$	Äquivalenzoperator
$[\star]$	Äquivalenzklasse der Deformation $\star$
$\text{Def}(\mathcal{A})$	Menge der Äquivalenzklassen von Deformationen der Algebra $\mathcal{A}$
$\text{Def}(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$	Menge der Äquivalenzklassen von Deformationen der Algebra $\mathcal{A}$ bei fester POISSON-Struktur
$\text{Aut}(\mathcal{A})$	Gruppe der Automorphismen der Algebra $\mathcal{A}$
$M_n(\mathcal{A})$	$n \times n$ -Matrizen mit Einträgen aus $\mathcal{A}$ , $M_n(\mathcal{A}) = M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}$
$\text{cl}$	klassische Limes-Abbildung
$(\mathcal{A}_h, \star_{\text{Wick}})$	konvergente deformierte Algebra $\mathcal{A}_h \subset C^\omega(\mathbb{C}^n)[[\lambda]]$ bezüglich des WICK-Produkts
$(M, \Lambda, \star)$	POISSON-Mannigfaltigkeit mit Sternprodukt $\star$
$(M, \omega, \star)$	symplektische Mannigfaltigkeit mit Sternprodukt $\star$
$R, S, T$	Äquivalenzoperatoren bei Sternprodukten
$H_{\text{dR}}^n(M), H_{\text{dR}}^n(M, \mathbb{C})$	$n$ -te DE RHAM-Kohomologie von $M$
$H_{\text{dR}}^n(M, \mathbb{Z})$	$n$ -te integrale DE RHAM-Kohomologie von $M$
$c(\star)$	charakteristische Klasse des Sternprodukts $\star$
$x^1, \dots, x^n$	lokale Koordinaten in einer Umgebung $U \subseteq M$
$dx^1, \dots, dx^n$	Koordinateneinsformen
$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$	Koordinatenvektorfelder
$\omega_{ij}, \Lambda^{ij}$	Koeffizienten der symplektischen Form $\omega$ , des POISSON-Tensors $\Lambda$
$\Lambda^n T^*M$	schiefsymmetrische Tensoren der Stufe $n$ auf $T^*M$
$S^n T^*M$	symmetrische Tensoren der Stufe $n$ auf $T^*M$
$W_p, W_p \otimes \Lambda^\bullet$	formale WEYL-Algebren über dem Punkt $p \in M$
$W, W \otimes \Lambda^\bullet$	Bündel aller formalen WEYL-Algebren
$\deg_a, \deg_s$	schiefsymmetrische, symmetrische Gradabbildung
$\deg_\lambda, \text{Deg}$	$\lambda$ -Gradabbildung, totaler Grad
$W^{(k)}, W_p^{(k)}$	homogene Elemente bezüglich des totalen Grades (über $p \in M$ )
$(W_k \otimes \Lambda)$	Menge aller Elementen vom Deg-Grad $\geq k$
$a^{(k)}$	homogenes Element in $W_p^{(k)}$

$\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet$	WEYL-Algebra, direktes Produkt der Schnitte im Bündel $\mathcal{W} \otimes \Lambda$
$\mu, \circ_{\text{Weyl}}$	undeformiertes Produkt, faserweises WEYL-MOYAL-Produkt
$\text{ad}(a), [a, \cdot]_{\circ_{\text{Weyl}}}$	$\mathbb{Z}_2$ -graduierter Kommutator bezüglich $\circ_{\text{Weyl}}$ mit $a$
$\delta, \delta^*, \delta^{-1}$	Differentiale
$\sigma, \sigma', \sigma^E$	Projektion auf symmetrischen und schiefsymmetrischen Grad 0
$\lfloor \cdot \rfloor$	abrunden auf nächste ganze Zahl, d. h. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ und $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in \mathbb{R}$
$\nabla$	(symplektischer) Zusammenhang
$\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \mathcal{E}$	Bündel, $(\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \text{End}(E), \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet)$ -Bimodul
$\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \text{End}(E)$	Assoziative Algebra, Erweiterung von $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet$
$D, D', D^E$	kovariante Differentiale auf $\mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet, \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \text{End}(E), \mathcal{W} \otimes \Lambda^\bullet \otimes \mathcal{E}$
$\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}^E$	FEDOSOV-Derivationen
$\hat{R}$	Krümmung eines Zusammenhangs $\nabla$
$R$	symplektische Krümmung eines symplektischen Zusammenhangs $\nabla$
$R^E$	Krümmung des Zusammenhangs $\nabla^E$ auf $E \xrightarrow{\pi} M$
$R'$	Krümmung des Zusammenhangs $\nabla^{\text{End}(E)}$ auf Endomorphismenbündel $\text{End}(E) \xrightarrow{\pi'} E$
$r, r^E, r'$	spezielle Elemente in WEYL-Algebren
$\Omega$	formale Reihe geschlossener Zweiformen
$s$	Element in $\mathcal{W}_3 \otimes \Lambda^0$
$\star_{(\nabla, \Omega, s)}$	FEDOSOV-Sternprodukt
$E \xrightarrow{\pi} M$	(komplexes) Vektorbündel über $M$
$L \xrightarrow{\pi} M$	(komplexes) Geradenbündel über $M$
$\cdot', \cdot$	undeformierte Modulverknüpfungen
$\circ', \circ$	WEYL-MOYAL deformierte Modulverknüpfungen
$\bullet', \bullet$	deformierte Modulmultiplikationen
$(M, \omega, G, \nabla)$	symplektische $G$ -Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang
$g.$	Wirkung der Gruppe $G$

## Kapitel 4

$(M_{\text{red}}, \omega_{\text{red}})$	durch Phasenraumreduktion reduzierte symplektische Mannigfaltigkeit
$J, \mathbf{J}$	Impuslabbildung, Quantenimpulsabbildung
$T_{\mathbb{C}}^\bullet(\mathfrak{g})[[\lambda]]$	formale Potenzreihe der komplexifizierten Tensoralgebra einer LIE-Algebra $\mathfrak{g}$
$\mathcal{U}_\lambda(\mathfrak{g})$	$\lambda$ -abhängige modifizierte universell einhüllende Algebra der LIE-Algebra $\mathfrak{g}$
$\text{Pol}^\bullet(\mathfrak{g}^*)$	Algebra der Polynome auf $\mathfrak{g}^*$

---

$\star_{\mathbf{g}}$	GUTT-Sternprodukt auf $\text{Pol}^{\bullet}(\mathbf{g}^*)[[\lambda]]$
$P_0$	idempotentes Element oder Projektor in $M_n(\mathcal{A})$
$\mathbf{P}$	deformiertes idempotentes Element oder deformierter Projektor
$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$	deformiertes inneres Produkt
$H_{\pi}^n(M, \mathbb{C})$	$n$ -te POISSON-Kohomologie
$H_{\pi}^n(M, \mathbb{Z})$	$n$ -te integrale POISSON-Kohomologie

## Anhang A

$(G, \cdot)$	Gruppe
$\mathcal{M}_{\mathbf{R}}$	$\mathbf{R}$ -Rechtsmodul
$\mathfrak{l}_L, \mathfrak{l}_R, I$	Linksideal, Rechtsideal, Ideal eines Rings $\mathbf{R}$
$\hat{\mathbf{R}}$	Quotientenkörper des Rings $\mathbf{R}$
$\mathcal{A}$	Assoziative Algebra
$\mu, \mu^{\text{op}}$	Multiplikation $\mu(a \otimes b) = ab$ , geflippte Multiplikation $\mu^{\text{op}}(a \otimes b) = ba$
$\eta$	Einsabbildung
$\mathfrak{Z}(\mathcal{A})$	Zentrum der Algebra $\mathcal{A}$
$\mathcal{K}$	Koassoziative Koalgebra
$\Delta, \Delta^{\text{op}}$	Komultiplikation, geflippte Komultiplikation
$\varepsilon$	Koeins
$\text{Prim}(\mathcal{K})$	Primitive Elemente der Koalgebra $\mathcal{K}$
$H$	HOPF-Algebra, HOPF- $\ast$ -Algebra
$S$	Antipodenabbildung einer HOPF-Algebra
$I, \ast$	Antilinearer Antiautomorphismus / $\ast$ -Involution
$\mathcal{I}$	HOPF-Ideal
$\mathfrak{g}$	LIE-Algebra
$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$	Universell Einhüllende von $\mathfrak{g}$
$\mathbb{C}(G)$	Gruppenalgebra über Ring $\mathbb{C}$
$\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$	komplexifizierte universell Einhüllende $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$
$\mathcal{F}(G)$	$\mathbb{C}$ -wertige Funktionen auf der Gruppe $G$
$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(H, \mathcal{A})$	$\mathbb{C}$ -linearen Homomorphismen von $H$ nach $\mathcal{A}$
$\mathbf{a}, \mathbf{b}$	Elemente in $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(H, \mathcal{A})$
$\mathcal{A} \rtimes H$	Cross-Produktalgebra
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, F$	Kategorien $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ und Funktor $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$
$\lambda$	Formaler Parameter
$\mathcal{M}[[\lambda]]$	Formale Reihen in $\lambda$ mit Koeffizienten im Modul $\mathcal{M}$
$\mathcal{M}[\lambda]$	Polynome in $\lambda$ mit Koeffizienten in $\mathcal{M}$

$\mathcal{A}[[\lambda]]$	Formalen Potenzreihen in $\lambda$ mit Koeffizienten in der Algebra $\mathcal{A}$
$o(\cdot)$	$\lambda$ -adische Ordnung
$\varphi(\cdot)$	$\lambda$ -adische Bewertung
$d_\varphi$	von $\varphi$ induzierte Metrik

## Anhang A.5

$(E, \pi, M, F, G)$	Faserbündel mit Totalraum $E$ , Projektion $\pi$ , Basismannigfaltigkeit $M$ , Faser $F$ und Strkturgruppe $G$
$t_{ij}$	Übergangsfunktionen
$\nabla^E$	Zusammenhang auf Vektorbündel $E \xrightarrow{\pi} M$
$\nabla^{\text{End}(E)}$	Zusammenhang auf Endomorphismenbündel $\text{End}(E) \xrightarrow{\pi} E$
$R^E$	Krümmung eines Zusammhangs auf $E$
$\Lambda_{,j}^{k\ell}$	$\Lambda^{k\ell}$ nach der $j$ -ten Komponente abgeleitet
$T_\nabla$	Torsion eines Zusammenhangs $\nabla$ auf $TM$

# Personenindex

Für Biographien von wichtigen Geometern und Algebraikern verweisen wir auf die Bücher [SCRIBA & SCHREIBER 2005] und [ALTEN *et al.* 2003]. Eine Übersicht zu den genannten Nobelpreisträgern liefert beispielsweise [BROCKHAUS 2001]. Weitere hier verwendete Informationen stammen von der Internetseite <http://www.wikipedia.org>.

ABEL, NIELS H. (\*1802, †1829)

NIELS HENRIK ABEL war norwegischer Mathematiker und starb im Alter von 26 Jahren an Tuberkulose.

ARCHIMEDES (\*287, †212 v. Chr.)

ARCHIMEDES VON SYRAKUS war antiker griechischer Mathematiker, Physiker und Ingenieur.

ARTIN, EMIL (\*1898, †1962)

EMIL ARTIN war österreichischer Mathematiker und beschäftigte sich mit Algebra, Zahlentheorie sowie der Körpertheorie.

BARGMANN, VALENTINE (\*1908, †1989)

VALENTIN BARGMANN war ein in Deutschland geborener mathematischer Physiker. Er emigrierte in die USA in der er ALBERT EINSTEIN assistierte.

BIRKHOFF, GERRETT (\*1911, †1996)

GERRETT BIRKHOFF war amerikanischer Mathematiker, der auf dem Gebiet der Algebra forschte.

BOREL, ÉMILE (\*1871, †1956)

Sein kompletter Name lautet FÉLIX ÉDOUARD JUSTIN ÉMILE BOREL. Er war französischer Mathematiker und Politiker und leistete grundlegende Beiträge zur Topologie, Maß-, Wahrscheinlichkeits- und Spieltheorie.

CARTAN, ÉLIE J. (\*1869, †1951)

ÉLIE JOSEPH CARTAN war ein bedeutender französischer Mathematiker, der Beiträge zu Lie-Gruppen, der Differentialgeometrie sowie der mathematischen Physik geliefert hat.

CAUCHY, AUGUSTIN L. (\*1789, †1857)

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY war französischer Mathematiker und verfaßte knapp 800 Veröffentlichungen in fast allen Bereichen der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie.

ČECH, EDUARD (\*1893, †1960)

EDUARD ČECH war ein böhmischer Mathematiker.

- CHERN, SHIING-SHEN (\*1911, †2004) SHIING-SHEN CHERN war chinesisch-amerikanischer Mathematiker, der mit seinen Beiträgen zur Topologie und Geometrie die Mathematik des 20. Jahrhunderts geprägt hat.
- CHEVALLEY, CLAUDE (\*1909, †1984) CLAUDE CHEVALLEY war ein französischer Mathematiker und Gründungsmitglied der Bourbaki-Gruppe. Er hat insbesondere in der LIE-Gruppentheorie und LIE-Algebrentheorie wichtige Beiträge beigesteuert.
- DARBOUX, JEAN G. (\*1842, †1917) JEAN GASTON DARBOUX war ein französischer Mathematiker und assistierte JOSEPH LIOUVILLE an der Sorbonne in Paris.
- DE MORGAN, AUGUSTUS (\*1806, †1871) AUGUSTUS DE MORGAN war ein in Indien geborener, britischer Mathematiker, der sich insbesondere der Logik verschrieben hat.
- DE RHAM, GEORGES (\*1903, †1990) GEORGES DE RHAM war ein schweizerischer Mathematiker, der sich insbesondere mit der Differentialtopologie auseinandersetzte. Ihm gelang der Beweis der Homotopieinvarianz der nach ihm benannten Kohomologie.
- DELIGNE, PIERRE R. (\*1944) PIERRE RENÉ DELIGNE ist belgischer Mathematiker und erhielt 1978 die FIELDS-Medaille. Ihm gelang der vollständige Beweis der WEIL-Vermutungen.
- DESCARTES, RENÉ (\*1596, †1650) RENÉ DESCARTES war französischer Philosoph, Mathematiker und Wissenschaftler, der auch als CARTESIUS bekannt war. Er gilt als einer der wichtigsten Denker der Neuzeit, da er sowohl die Philosophie als auch die Mathematik entscheidend beeinflusste.
- DIRAC, PAUL A. M. (\*1902, †1984) PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC war britischer Physiker. Er erhielt 1933 den NOBELpreis für Physik: „für die Entdeckung einer neuen, nützlichen Form der Atomtheorie“.
- EINSTEIN, ALBERT (\*1879, †1955) ALBERT EINSTEIN war Deutsch-schweizerischer Physiker. Er erhielt 1921 den NOBELpreis Physik „für seine Verdienste in der theoretischen Physik, besonders für die Entdeckung des Photoelektrischen Effekts“.



---

EILENBERG, SAMUEL (*1913, †1998)	SAMUEL EILENBERG war polnischer Mathematiker. Er beschäftigte sich vorwiegend mit der algebraischen Topologie sowie der Kategorientheorie.
EULER, LEONHARD (*1707, †1783)	LEONHARD EULER war schweizerischer Mathematiker und Physiker. Es war wahrscheinlich der wichtigste Mathematiker des 18. Jahrhunderts.
FEDOSOV, BORIS (*1938)	BORIS FEDOSOV ist ein russischer Mathematiker, der grundlegende Beiträge auf dem Gebiet der Deformationsquantisierung geleistet hat.
FOCK, WLADIMIR A. (*1898, †1974)	WLADIMIR ALEXANDROWITSCH FOCK war russischer Physiker, der grundlegende Beiträge zur Quantenmechanik und zur Quantenfeldtheorie beigetragen hat.
GAUSS, CARL F. (*1777, †1855)	CARL FRIEDRICH GAUSS war deutscher Mathematiker, Geodät und Erfinder.
GROTHENDIECK, ALEXANDER (*1928)	Als Sohn eines russischen Vaters und einer deutschen Mutter in Berlin geboren, entwickelte er sich zu einem der wichtigsten Mathematikern des 20. Jahrhunderts und leistete wichtige Beiträge in der algebraischen Topologie, der algebraischen Geometrie sowie der Funktionalanalysis.
GUTT, SIMONE (*1956)	SIMONE GUTT ist belgische Mathematikerin und an der Université Libre de Bruxelles tätig.
HAAR, ALFRÉD (*1885, †1933)	ALFRÉD HAAR war ungarischer Mathematiker. Er promovierte bei DAVID HILBERT.
HAMILTON, WILLIAM R. (*1805, †1865)	Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON war irisch-englischer Mathematiker und Physiker, hatte ab 1827 eine Professur für Astronomie inne und war königlicher Astronom für Irland.
HAUSDORFF, FELIX (*1868, †1942)	FELIX HAUSDORFF war deutscher Mathematiker und Mitbegründer der modernen Topologie.
HEISENBERG, WERNER (*1901, †1976)	WERNER HEISENBERG war deutscher Physiker und erhielt 1932 den Physik NOBELpreis für seine Arbeiten zur Aufstellung der Quantenmechanik.
HELLINGER, ERNST D. (*1883, †1950)	ERNST DAVID HELLINGER war deutscher Mathematiker.
HERMITE, CHARLES (*1822, †1901)	CHARLES HERMITE war französischer Mathematiker. Er arbeitete insbesondere auf dem Gebiet der Zahlentheorie und der Algebra.

HILBERT, DAVID (*1862, †1943)	DAVID HILBERT war ostpreußischer Mathematiker. Er axiomatisierte die Geometrie und formulierte die 23 HILBERT-Probleme.
HOCHSCHILD, GERHARD P. (*1915)	GERHARD PAUL HOCHSCHILD ist ein in Berlin geborener Mathematiker.
HOPF, HEINZ (*1894, †1971)	HEINZ HOPF war schweizerischer Mathematiker, der insbesondere im Bereich der algebraischen Topologie arbeitete.
JACOBI, CARL G. J. (*1804, †1851)	CARL GUSTAV JACOB JACOBI war ein deutscher Mathematiker und wurde von seinen Schülern der „EULER des 19. Jahrhunderts“ genannt. Er trug zu vielen Bereichen der Mathematik wichtige Ergebnisse bei und wird daher als einer der vielseitigsten Mathematiker der Geschichte angesehen.
JACOBSON, NATHAN (*1910, †1999)	NATHAN JACOBSON war amerikanischer Mathematiker.
KÄHLER, ERICH (*1906, †2000)	ERICH KÄHLER war deutscher Mathematiker.
KEPLER, F. JOHANNES (*1571, †1630)	FRIEDRICH JOHANNES KEPLER war ein deutscher Naturphilosoph, Mathematiker, Astronom, Astrologe und Optiker.
KONTSEVICH, MAXIM (*1964)	MAXIM KONTSEVICH ist russischer Mathematiker. Er bekam 1998 die FIELDS-Medaille und ist derzeit am Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS) in Bures-sur-Yvette, Frankreich.
KRONECKER, LEOPOLD (*1823, †1891)	LEOPOLD KRONECKER war deutscher Mathematiker. Er beschäftigte sich mit Algebra, Zahlentheorie, Analysis und der Funktionentheorie.
LAGRANGE, JOSEPH L. (*1736, †1813)	JOSEPH LOUIS LAGRANGE, der als GIUSEPPE LUIGI LAGRANGIA in Turin geboren wurde, nahm die französische Staatsbürgerschaft an und ist für seine Arbeiten in der Astronomie, der Physik sowie der Mathematik bekannt geworden.
LAPLACE, PIERRE-SIMON (*1749, †1827)	PIERRE-SIMON MARQUIS DE LAPLACE war französischer Mathematiker und Astronom.
LAURENT, PIERRE A. (*1813, †1853)	PIERRE ALPHONSE LAURENT war französischer Mathematiker und Entdecker der LAURENT-Reihen.
LEBESGUE, HENRI L. (*1875, †1941)	HENRI LÉON LEBESGUE war französischer Mathematiker.

- 
- LEIBNIZ, GOTTFRIED W. (\*1646, †1716) GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ war ein deutscher Philosoph, Mathematiker, Diplomat, Physiker, Historiker, Bibliothekar und Doktor des weltlichen und des Kirchenrechts.
- LIE, M. SOPHUS (\*1842, †1899) MARIUS SOPHUS LIE war ein norwegischer Mathematiker. Er begründete die kontinuierlichen Symmetrien und leistete Beiträge zur Theorie der Differentialgleichungen.
- LIOUVILLE, JOSEPH (\*1809, †1882) JOSEPH LIOUVILLE war französischer Mathematiker. Er legte an der École Polytechnique u. a. Prüfungen bei SIMÉON-DENIS POISSON ab und erhielt dort 1838 eine Professur. Er arbeitete insbesondere in der Zahlentheorie, Funktionentheorie und der Differentialgeometrie.
- MORITA, KIITI (\*1915, †1995) KIITI MORITA war japanischer Mathematiker.
- MOYAL, JOSE E. (\*1910, †1998) JOSE ENRIQUE MOYAL war australischer Mathematiker und Physiker.
- NEUMAIER, NIKOLAI A. (\*1971) NIKOLAI ALEXANDER NEUMAIER ist deutscher Physiker und Mathematiker. Er ist z. Zt. an der ALBERT-LUDWIGS-Universität Freiburg tätig und arbeitet auf dem Gebiet der Deformationsquantisierung.
- NEWTON, ISAAC (\*1643, †1727) Sir ISAAC NEWTON war englischer Mathematiker, Physiker, Astronom, Alchemist und Philosoph.
- NOETHER, EMMY A. (\*1882, †1935) EMMY AMALIE NOETHER habilitierte sich 1919 als erste Frau in Deutschland. Sie gilt als eine der Mitbegründerinnen der modernen Algebra.
- PICARD, CHARLES É. (\*1856, †1941) CHARLES ÉMILE PICARD war französischer Mathematiker.
- PLANCK, MAX (\*1858, †1947) MAX PLANCK war deutscher Physiker. Er erhielt den NOBELpreis für Physik 1918 „als Anerkennung des Verdienstes das er sich durch seine Quantentheorie um die Entwicklung der Physik erworben hat“.
- POINCARÉ, HENRI (\*1854, †1912) HENRI POINCARÉ war ein bedeutender französischer Mathematiker und theoretischer Physiker.

- POISSON, SIMÉON-DENIS (\*1781, †1840) SIMÉON-DENIS POISSON war ein bedeutender französischer Mathematiker und Physiker. In der Mathematik arbeitete auf den Gebieten der Differentialgeometrie, der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie der Infinitesimalrechnung. In der Physik forschte er insbesondere an der Wellentheorie, der Akustik, sowie der Elastizitätstheorie und der Wärme.
- RIEMANN, BERNHARD (\*1826, †1866) BERNHARD RIEMANN war ein bedeutender deutscher Mathematiker, der unter anderem bei GAUSS und DIRICHLET lernte. Er schuf die mathematischen Grundlagen für die Allgemeine Relativitätstheorie EINSTEINS. Er starb mit 39 Jahren an Tuberkulose.
- SCHRÖDINGER, ERWIN (\*1887, †1961) ERWIN SCHRÖDINGER war österreichischer Physiker. Er erhielt 1933 den NOBELpreis für Physik.
- SCHWARZ, K. HERMANN A. (\*1843, †1921) KARL HERMANN AMANDUS SCHWARZ war ein deutscher Mathematiker, der sich insbesondere mit der komplexen Analysis auseinandergesetzt hat.
- SERRE, JEAN-PIERRE (\*1926) JEAN-PIERRE SERRE ist französischer Mathematiker, der die Mathematik des 20. Jahrhunderts prägte. Er erhielt u. a. die FIELDS-Medaille im Jahre 1954 und den ABEL-Preis 2003.
- SWAN, RICHARD G. RICHARD GORDON SWAN ist amerikanischer Mathematiker.
- SWEEDLER, MOSS E. MOSS EISENBERG SWEEDLER ist amerikanischer Mathematiker.
- TAYLOR, BROOK (\*1685, †1731) BROOK TAYLOR war englischer Mathematiker, dem es gelang, die allgemeine Konstruktion für TAYLOR-Reihen von Funktionen, die eine solche Reihe besitzen, anzugeben.
- TOEPLITZ, OTTO (\*1881, †1940) OTTO TOEPLITZ war deutsch-jüdischer Mathematiker. Er beschäftigte sich mit Funktionalanalysis und linearer Algebra und hatte eine Professur in Bonn bevor er 1939 nach Palästina flüchtete.
- VEY, JACQUES (\*1943, †1979) JACQUES VEY war schweizerischer Mathematiker.
- WEYL, HERMANN K. H. (\*1885, †1955) HERMANN KLAUS HUGO WEYL war deutscher Mathematiker.
- WICK, GIAN-CARLO (\*1909, †1992) GIAN-CARLO WICK war italienischer Physiker.

WITT, ERNST (\*1911, †1991)

ERNST WITT war deutscher Mathematiker. Er studierte in Freiburg im Breisgau und Göttingen, wo er bei Emmy Noether promovierte und sich habilitierte.



# Literaturverzeichnis

- ABRAHAM, R. & MARSDEN, J. E. [1985]. *Foundations of Mechanics*. 2. Auflage. Reading, Mass.: Addison Wesley Publishing Company.
- AGARWAL, G. S. & WOLF, E. [1970a]. *Calculus for Functions of Noncommuting Operators and General Phase-Space Methods in Quantum Mechanics. I. Mapping Theorems and Ordering of Functions of Noncommuting Operators*. Phys. Rev. D 2(10), S. 2161–2186.
- AGARWAL, G. S. & WOLF, E. [1970b]. *Calculus for Functions of Noncommuting Operators and General Phase-Space Methods in Quantum Mechanics II*. Phys. Rev. D 2, S. 2187–2205.
- AGARWAL, G. S. & WOLF, E. [1970c]. *Calculus for Functions of Noncommuting Operators and General Phase-Space Methods in Quantum Mechanics III*. Phys. Rev. D 2(10), S. 2206–2225.
- ALTEN, H.-W., DJAFARI NAINI, A., FOLKERTS, M., SCHLOSSER, H., SCHLOTE, K.-H. & WUSSING, H. [2003]. *4000 Jahre Geometrie, Geschichte Kulturen Menschen*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- ARA, P. [1999]. *Morita Equivalence for Rings with Involution*. Alg. Rep. Theo. 2, S. 227–247.
- ARA, P. [2000]. *Morita Equivalence and Pedersen Ideals*. Proc. Amer. Math. Soc. 129(4), S. 1041–1049.
- ARNAL, D., CORTET, J. C., MOLIN, P. & PINCZON, G. [1983]. *Covariance and Geometrical Invariance in  $\ast$ -Quantization*. J. Math. Phys. 24(2), S. 276–283.
- BASS, H. [1968]. *Algebraic K-Theory*. New York, Amsterdam: W. A. Benjamin, Inc.
- BAYEN, F., FLATO, M., FRØNSDAL, C., LICHNEROWICZ, A. & STERNHEIMER, D. [1977]. *Quantum Mechanics as a Deformation of Classical Mechanics*. Lett. Math. Phys. 1, S. 521–530.
- BECHER, F. [2006]. *Sternprodukte auf Kotangentialbündeln*. Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik und Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg.
- BEISER, S. [2005]. *Eine konvergente Algebra für das Wick-Sternprodukt und kohärente Zustände in der Deformationsquantisierung*. Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik und Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg.
- BEISER, S., RÖMER, H. & WALDMANN, S. [2005]. *Convergence of the Wick Star Product*. Preprint math.QA/0506605.

- BÉNABOU, J. [1967]. *Introduction to Bicategories*. In *Reports of the Midwest Category Seminar*, (S. 1–77). Springer-Verlag.
- BEREZIN, F. A. [1975]. *General Concept of Quantization*. Commun. Math. Phys. 40, S. 153–174.
- BERTELSON, M., CAHEN, M. & GUTT, S. [1997]. *Equivalence of Star Products*. Class. Quant. Grav. 14, S. A93–A107.
- BIELIAVSKY, P. [2002]. *Strict Quantization of Solvable Symmetric Spaces*. J. of Symplectic Geometry 1(2), S. 269–320.
- BORDEMAN, M. [1995]. *Aufzeichnungen zu Verbänden*. Private unveröffentliche Aufzeichnungen.
- BORDEMAN, M. [2004]. *(Bi)Modules, Morphismes at Réduction des Star-produits : Le Cas Symplectique, Feuilletages et Obstructions*. Preprint math.QA/0403334.
- BORDEMAN, M., BRISCHLE, M., EMMRICH, C. & WALDMANN, S. [1996]. *Phase Space Reduction for Star Products: An Explicit Construction for  $\mathbb{C}P^n$* . Lett. Math. Phys. 36, S. 357–371.
- BORDEMAN, M., GINOT, G., HALBOUT, G., HERBIG, H.-C. & WALDMANN, S. [2005]. *Formalité  $G_\infty$  Adaptée et Star-Représentations sur des Sous-Variétés Coïsotropes*. Preprint math.QA/0504276. Erweiterte Version des Preprints math/0309321.
- BORDEMAN, M., HERBIG, H.-C. & WALDMANN, S. [2000]. *BRST Cohomology and Phase Space Reduction in Deformation Quantization*. Commun. Math. Phys. 210, S. 107–144.
- BORDEMAN, M., NEUMAIER, N. & WALDMANN, S. [1998]. *Homogeneous Fedosov Star Products on Cotangent Bundles I: Weyl and Standard Ordering with Differential Operator Representation*. Commun. Math. Phys. 198, S. 363–396.
- BORDEMAN, M., NEUMAIER, N. & WALDMANN, S. [1999]. *Homogeneous Fedosov Star Products on Cotangent Bundles II: GNS Representations, the WKB Expansion, Traces, and Applications*. J. Geom. Phys. 29, S. 199–234.
- BORDEMAN, M. & WALDMANN, S. [1997]. *A Fedosov Star Product of Wick Type for Kähler Manifolds*. Lett. Math. Phys. 41, S. 243–253.
- BROCKHAUS, F. A. (Hrsg.) [2001]. *Nobelpreise, Chronik herausragender Leistungen*. Mannheim, Leipzig: F. A. Brockhaus.
- BURSZTYN, H. [2001]. *Morita Equivalence in Deformation Quantization*. Dissertation, Berkeley University.
- BURSZTYN, H. & WALDMANN, S. [2000]. *Deformation Quantization of Hermitian Vector Bundles*. Lett. Math. Phys. 53, S. 349–365.
- BURSZTYN, H. & WALDMANN, S. [2001a]. *\*-Ideals and Formal Morita Equivalence of \*-Algebras*. Int. J. Math. 12(5), S. 555–577.



- 
- BURSZTYN, H. & WALDMANN, S. [2001b]. *Algebraic Rieffel Induction, Formal Morita Equivalence and Applications to Deformation Quantization*. J. Geom. Phys. 37, S. 307–364.
- BURSZTYN, H. & WALDMANN, S. [2002]. *The Characteristic Classes of Morita Equivalent Star Products on Symplectic Manifolds*. Commun. Math. Phys. 228, S. 103–121.
- BURSZTYN, H. & WALDMANN, S. [2003]. *Completely Positive Inner Products and Strong Morita Equivalence*. Preprint (FR-THEP 2003/12) math.QA/0309402. Wird in Pacific J. Math. veröffentlicht.
- BURSZTYN, H. & WALDMANN, S. [2004]. *Bimodule Deformations, Picard Groups and Contravariant Connections*. K-Theory 31, S. 1–37.
- BURSZTYN, H. & WALDMANN, S. [2005]. *Hermitian Star Products are Completely Positive Deformations*. Lett. Math. Phys. 72, S. 143–152.
- CAHEN, M., FLATO, M., GUTT, S. & STERNHEIMER, D. [1985]. *Do Different Deformations Lead to the Same Spectrum?* J. Geom. Phys. 2(1), S. 35–48.
- CANNAS DA SILVA, A. & WEINSTEIN, A. [1999]. *Geometric Models for Noncommutative Algebras*. Berkeley Mathematics Lecture Notes. AMS.
- CARTAN, H. & EILENBERG, S. [1999]. *Homological Algebra*. 13. Auflage. Princeton, New Jersey: Princeton University Press. Erstveröffentlichung 1956.
- CHARI, V. & PRESSLEY, A. [1994]. *A Guide To Quantum Groups*. Cambridge U. K.: Cambridge University Press.
- DE WILDE, M. & LECOMTE, P. B. A. [1983a]. *Existence of Star-Products and of Formal Deformations of the Poisson Lie Algebra of Arbitrary Symplectic Manifolds*. Lett. Math. Phys. 7, S. 487–496.
- DE WILDE, M. & LECOMTE, P. B. A. [1983b]. *Star-Products on Cotangent Bundles*. Lett. Math. Phys. 7, S. 235–241.
- DE WILDE, M. & LECOMTE, P. B. A. [1983c]. *Star-Produits et Déformations Formelles Associées aux Variétés Symplectiques Exactes*. C. R. Acad. Sc. Paris 296, S. 825–828.
- DE WILDE, M. & LECOMTE, P. B. A. [1984]. *Erratum to: “Star-Products on Cotangent Bundles”*. Lett. Math. Phys. 8, S. 79.
- DELIGNE, P. [1995]. *Déformations de l’Algèbre des Fonctions d’une Variété Symplectique: Comparaison entre Fedosov et de Wilde, Lecomte*. Sel. Math. New Series 1(4), S. 667–697.
- DIRAC, P. A. M. [1978]. In MARLOW, A. R. (Hrsg.), *Mathematical Foundation of Quantum Theory*. New York, San Francisco, London: Academic Press.
- DIRAC, P. A. M. [1982]. *The Principles of Quantum Mechanics*. The International Series of Monographs On Physics, 4. Auflage. Oxford USA: Oxford University Press. Erstveröffentlichung 1930.

- DIXMIER, J. [1977]. *Enveloping Algebras*. Nr. 14 in North-Holland Mathematical Library. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Co.
- EILENBERG, S. [1960]. *Abstract Description of Some Basic Functors*. J. Ind. Math. Soc. 24, S. 231–234.
- ETINGOF, P. & SCHIFFMANN, O. [1998]. *Lectures on Quantum Groups*. Boston: International Press.
- FEDOSOV, B. V. [1994]. *A Simple Geometrical Construction of Deformation Quantization*. J. Diff. Geom. 40, S. 213–238.
- FEDOSOV, B. V. [1996]. *Deformation Quantization and Index Theory*. Berlin: Akademie Verlag.
- GERRITZEN, L. [1994]. *Grundbegriffe der Algebra*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.
- GERSTENHABER, M. [1964]. *On the Deformation of Rings and Algebras*. Ann. Math. 79, S. 59–103.
- GERSTENHABER, M. & SCHACK, S. D. [1990]. *Bialgebra Cohomology, Deformations and Quantum Groups*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 87, S. 478–481.
- GROSSMANN, S. [1988]. *Funktionalanalysis*. Studentexte: Physik, 4. Auflage. Wiesbaden: AULA-Verlag.
- GUILLEMIN, V., GINZBURG, V. & KARSHON, Y. [2002]. *Moment Maps, Cobordism, and Hamiltonian Group Actions*, Vol. 98 von *Mathematical Surveys and Monographs*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.
- GUTT, S. [1983]. *An Explicit  $\ast$ -Product on the Cotangent Bundle of a Lie Group*. Lett. Math. Phys. 7, S. 249–258.
- GUTT, S. & RAWNSLEY, J. [1999]. *Equivalence of Star Products on a Symplectic Manifold; an Introduction to Deligne's Čech Cohomology Classes*. J. Geom. Phys. 29, S. 347–392.
- GUTT, S. & RAWNSLEY, J. [2003]. *Natural Star Products on Symplectic Manifolds and Quantum Moment Maps*. Lett. Math. Phys. 66, S. 123–139.
- HAAG, R. & KASTLER, D. [1964]. *An Algebraic Approach to Quantum Field Theory*. J. Math. Phys. 5(7), S. 848–861.
- HELLER, J. G., NEUMAIER, N. & WALDMANN, S. [2006]. *A  $C^*$ -Algebraic Model for Locally Noncommutative Spacetimes*. Preprint math/0609850.
- HIRZEBRUCH, F. & SCHARLAU, W. [1991]. *Einführung in die Funktionalanalysis*. Mannheim, Wien, Zürich: B. I. Wissenschaftsverlag. Erstveröffentlichung 1971.
- JACOBSON, N. [1985]. *Basic Algebra I*. 2. Auflage. New York: Freeman and Company.
- JACOBSON, N. [1989]. *Basic Algebra II*. 2. Auflage. New York: Freeman and Company.

- 
- JANSEN, S. & WALDMANN, S. [2006]. *The H-Covariant Strong Picard Groupoid*. Journal of Pure and Applied Algebra 205, S. 542–598.
- KADISON, R. V. & RINGROSE, J. R. [1997a]. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume I: Elementary Theory*, Vol. 15 von *Graduate Studies in Mathematics*. Providence: American Mathematical Society.
- KADISON, R. V. & RINGROSE, J. R. [1997b]. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume II: Advanced Theory*, Vol. 16 von *Graduate Studies in Mathematics*. Providence: American Mathematical Society.
- KARABEGOV, A. V. [1996]. *Deformation Quantization with Separation of Variables on a Kähler Manifold*. Commun. Math. Phys. 180, S. 745–755.
- KARABEGOV, A. V. [1999]. *Pseudo-Kähler Quantization on Flag Manifolds*. Commun. Math. Phys. 200, S. 355–379.
- KASSEL, C. [1995]. *Quantum Groups*, Vol. 155 von *Graduate Texts in Mathematics*. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- KLIMYK, A. & SCHMÜDGEN, K. [1997]. *Quantum Groups and Their Representations*. Texts and Monographs in Physics. Heidelberg, Berlin, New York: Springer-Verlag.
- KOBAYASHI, S. & NOMIZU, K. [1963]. *Foundations of Differential Geometry I*. Nr. 15 in Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics. New York, London, Sydney: John Wiley & Sons.
- KONTSEVICH, M. [2003]. *Deformation Quantization of Poisson Manifolds*. Lett. Math. Phys. 66, S. 157–216.
- KOWALZIG, N., NEUMAIER, N. & PFLAUM, M. J. [2004]. *Phase Space Reduction of Star Products on Cotangent Bundles*. Preprint math/0403239.
- LAM, T. Y. [1999]. *Lectures on Modules and Rings*, Vol. 189 von *Graduate Texts in Mathematics*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
- LANCE, E. C. [1995]. *Hilbert  $C^*$ -Modules. A Toolkit for Operator Algebraists*, Vol. 210 von *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge: Cambridge University Press.
- LANDSMAN, N. P. [1998]. *Mathematical Topics between Classical and Quantum Mechanics*. Springer Monographs in Mathematics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
- LANG, S. [1997]. *Algebra*. 3. Auflage. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- LAX, M. J. [2001]. *Symmetry Principles in Solid State and Molecular Physics*. Dover Publications.
- MAJID, S. [1995]. *Foundations of Quantum Group Theory*. Cambridge University Press.
- MARSDEN, J. E. & RATIU, T. S. [1999]. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Nr. 17 in Texts in Applied Mathematics. New York, Heidelberg: Springer-Verlag.

- MARSDEN, J. E. & RATIU, T. S. [2000]. *Einführung in die Mechanik und Symmetrie*. New York, Heidelberg: Springer-Verlag.
- MORITA, K. [1958]. *Duality for Modules and its Applications to the Theory of Rings with Minimum Condition*. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A 6, S. 83–142.
- MOYAL, J. E. [1949]. *Quantum Mechanics as a Statistical Theory*. Proc. Camb. Phil. Soc. 45, S. 99–124.
- MÜLLER-BAHNS, M. F. & NEUMAIER, N. [2004]. *Some Remarks on  $\mathfrak{g}$ -invariant Fedosov Star Products and Quantum Momentum Mappings*. J. Geom. Phys. 50, S. 257–272.
- NAKAHARA, M. [1990]. *Geometry, Topology and Physics*. Graduate Student Series in Physics. Adam Hilger.
- NEST, R. & TSYGAN, B. [1995a]. *Algebraic Index Theorem*. Commun. Math. Phys. 172, S. 223–262.
- NEST, R. & TSYGAN, B. [1995b]. *Algebraic Index Theorem for Families*. Adv. Math. 113, S. 151–205.
- NEUMAIER, N. [2001]. *Klassifikationsergebnisse in der Deformationsquantisierung*. Dissertation, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg.
- NEUMAIER, N. [2002]. *Local  $\nu$ -Euler Derivations and Deligne's Characteristic Class of Fedosov Star Products and Star Products of Special Type*. Commun. Math. Phys. 230, S. 271–288.
- NEUMAIER, N. [2003]. *Universality of Fedosov's Construction for Star Products of Wick Type on Pseudo-Kähler Manifolds*. Rep. Math. Phys. 52, S. 43–80.
- NOETHER, E. [1918]. *Invariante Variationsprobleme*. Nachr. Königl. Gesell. Göttingen (S. 235–257).
- PALAIS, R. S. & STEWART, T. E. [1961]. *The Cohomology of Differentiable Transformation Groups*. Amer. J. Math. 83, S. 623–644.
- PFLAUM, M. J. [1998]. *The Normal Symbol on Riemannian Manifolds*. New York J. Math. 4, S. 97–125.
- PFLAUM, M. J. [2000]. *A Deformation-Theoretic Approach to Normal Order Quantization*. Russ. J. Math. Phys. 7, S. 82–113.
- RIEFFEL, M. A. [1972]. *Induced Representations of  $C^*$ -Algebras*. Bull. Amer. Math. Soc. 78, S. 606–609.
- RIEFFEL, M. A. [1974a]. *Induced Representations of  $C^*$ -Algebras*. Adv. Math. 13, S. 176–257.
- RIEFFEL, M. A. [1974b]. *Morita Equivalence for  $C^*$ -Algebras and  $W^*$ -Algebras*. J. Pure. Appl. Math. 5, S. 51–96.
- RIEFFEL, M. A. [1993]. *Deformation quantization for actions of  $\mathbb{R}^d$* . Mem. Amer. Math. Soc. 106(506).

- ROWEN, L. H. [1991]. *Ring Theory*. Academic Press. Student Edition.
- RUDIN, W. [1991]. *Functional Analysis*. 2. Auflage. New York: McGraw-Hill Book Company.
- SAKAI, S. [1971]. *C\*-Algebras and W\*-Algebras*, Vol. 60 von *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
- SCRIBA, C. J. & SCHREIBER, P. [2005]. *5000 Jahre Geometrie, Geschichte Kulturen Menschen*. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- STEWART, T. E. [1961]. *Lifting Group Actions in Fibre Bundles*. Ann. Math. 74, S. 192–198.
- STREATER, R. F. & WIGHTMAN, A. S. [2000]. *PCT, Spin and Statistics and All That*. Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton: Princeton University Press.
- SWEEDLER, M. [1969]. *Hopf Algebras*. New York: W. A. Benjamin, Inc.
- VAISMAN, I. [1994]. *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag.
- VON NEUMANN, J. [1996]. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- WALDMANN, S. [1995]. *Ein Sternprodukt für den komplex projektiven Raum und die Fedosov-Konstruktion für Kähler-Mannigfaltigkeiten*. Diplomarbeit, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg. 97 Seiten. Erhältlich unter <http://idefix.physik.uni-freiburg.de/~stefan/>.
- WALDMANN, S. [1999]. *Zur Deformationsquantisierung in der klassischen Mechanik: Observablen, Zustände und Darstellungen*. Dissertation, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg. 190 Seiten. Erhältlich unter <http://idefix.physik.uni-freiburg.de/~stefan/>.
- WALDMANN, S. [2002]. *Morita Equivalence of Fedosov Star Products and deformed Hermitian vector bundles*. Lett. Math. Phys. 60, S. 157–170.
- WALDMANN, S. [2004a]. *The Picard Groupoid in Deformation Quantization*. Lett. Math. Phys. 69, S. 223–235.
- WALDMANN, S. [2004b]. *Poisson-Geometrie und Deformationsquantisierung*. Vorlesungsskript ‘Poisson-Geometrie und Deformationsquantisierung’ gehalten in Freiburg 2003/2004, ca. 400 Seiten auf Deutsch. Erhältlich unter <http://idefix.physik.uni-freiburg.de/~stefan/>.
- WALDMANN, S. [2005a]. *The Covariant Picard Groupoid in Differential Geometry*. Erhältlich unter <http://www.citebase.org/cgi-bin/citations?id=oai:arXiv.org:math-ph/0509054>.
- WALDMANN, S. [2005b]. *States and Representation Theory in Deformation Quantization*. Rev. Math. Phys. 17, S. 15–75.
- WATTS, C. E. [1960]. *Intrinsic Characterization of Some Additive Functors*. Proc. Amer. Math. Soc. 11, S. 5–8.

- WEIDMANN, J. [2000]. *Lineare Operatoren in Hilberträumen – Teil I: Grundlagen*. Leipzig, Wiesbaden: B. G. Teubner.
- WEISS, S. [2006]. *Nichtkommutative Eichtheorien und Deformationsquantisierung von Hauptfaserbündeln*. Diplomarbeit, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg.
- WELLS, R. O. [1980]. *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Vol. 65 von *Graduate Texts in Mathematics*. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- WERNER, D. [2002]. *Funktionalanalysis*. 4. Auflage. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
- XU, P. [1998]. *Fedosov \*-Products and Quantum Momentum Maps*. Commun. Math. Phys. 197, S. 167–197.